TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

ÖTÖDIK OSZTÁLY

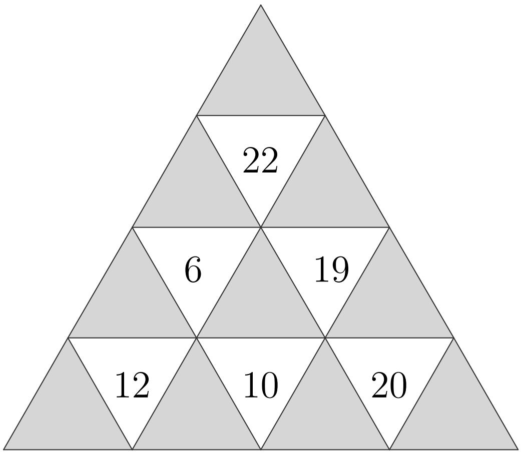
1. – Többet eszel, mint én! – mondta méltatlankodva Hernyó Álteknőcnek.
– Nem is igaz! – válaszolta felháborodva Álteknőc.
– Mindketten tévedtek – csitította őket Alice, hangjában enyhe szemrehányással.
Mire Fehér Nyúl a világ legszelídebb hangján fűzte véleményét az elhangzottakhoz:
– Mindnyájatoknak igaza van.
A négy állítás közül hány igaz?

Megoldás
Hernyó és Álteknőc állítása ellentmond egymásnak, e két állítás egyike igaz, a másik hamis. (***2*** *pont*)
Így Alice állítása nem lehet igaz, mert mindkét állítást hamisnak mondja. (***2*** *pont*)
Fehér Nyúlé sem lehet igaz, mert ő igaznak mondja a két ellentmondó állítást. (***2*** *pont*)
Az első két állítás közül az egyik igaz, az összes többi állítás hamis. Vagyis 1 igaz állítás van. (***1*** *pont*)
Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

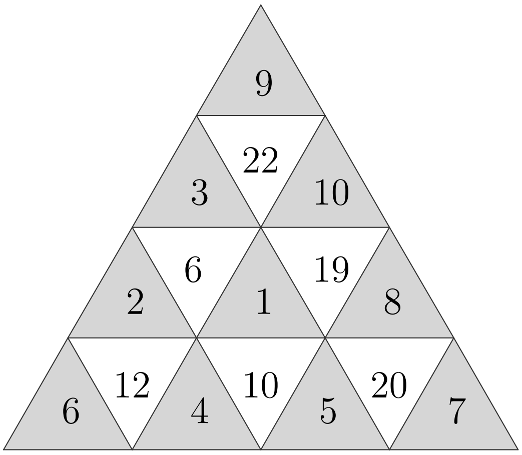
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Írjuk be 1-től 10-ig a számokat a szürke háromszögekbe úgy, hogy minden fehér háromszögben a vele oldallal szomszédos háromszögekbe írt számok összege szerepeljen.



Megoldás

Az egyetlen helyes kitöltés:



(***7*** *pont*)

Megjegyzés

Ha a megoldásban 1-10-ig minden szám egyszer szerepel, de nem jó a kitöltés akkor 2-vel kevesebb pontot kapjon, mint ahány helyes összeg van a megoldásban.

Ha egy nem befejezett megoldás minden száma egyezik az egyetlen helyes megoldás megfelelő számával, akkor azt a következőképpen pontozzuk: Ha 3 vagy 4 jó szám van, akkor 1 pont, ha 5 vagy 6, akkor 2 pont, ha 7 akkor 3 pont, ha 8 (vagy 9), akkor 4 pont.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

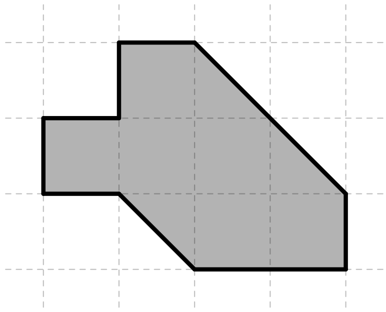
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

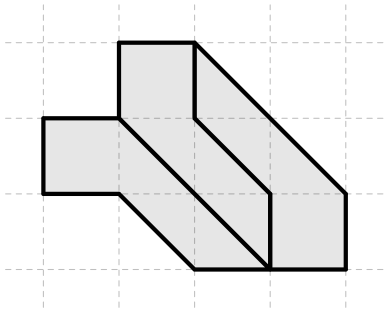
3. Osszuk fel az itt látható alakzatot

   (a) 3
   (b) 5
   (c) 15

   egybevágó (tükrözést is megengedve egymással fedésbe hozható) részre.

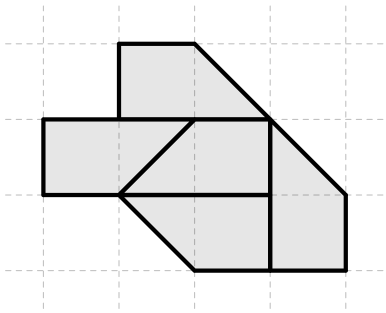


Megoldás
3 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



(***3*** *pont*)

5 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:

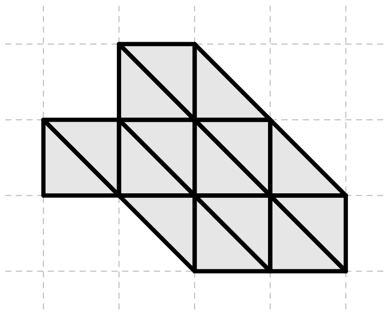


Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

(*2 pont*)

15 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



(*2 pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés
Mind a 3 részfeladatra egyéb megfelelő megoldások is léteznek, minden esetben az ezektől eltérő jó megoldásokért jár az adott résznek megfelelő részpontszám, de minden résznél csak egy jó megoldás vehető figyelembe.
Ha valaki nem ad jó felosztást, de kiszámolja, hogy hány egység területűnek kell egy résznek lennie (a) 2,5 b) 1,5 c) 0,5), akkor azért összesen 2 pont jár. Ha csak egy vagy két részfeladatnál teszi ezt meg, akkor az 1 pontot ér.

4. 2016 darab szomszédos egész számot összeadva különböző összegeket kaphatunk. Ezek közül az összegek közül melyik áll legközelebb a 0-hoz?

Megoldás
0 csak páratlan darabszámú szomszédos egész összegeként áll elő úgy, hogy középen a 0 áll, és minden szám az ellentettjével együtt szerepel az összegben. (*1 pont*)
$2016 : 2 = 1008$. -1007-től $+1007$-ig 2015 db szomszédos egész van, ezek összege 0. Ha az 1008-at, vagy a -1008-at az összeghez vesszük, 2016 db szomszédos számunk van, (*2 pont*)
s ezek összege 1008, vagy -1008, melyek egyenlő távolságra vannak a 0-tól. (*1 pont*)
Ha a számsort a negatív irányban ,,toljuk el", az összeg -1008-nál kisebb lesz, ha pozitív irányban, akkor 1008-nál nagyobb lesz. (Ez azért igaz, mert az első esetben pozitív számo(ka)t kihagyunk az összegből, negatíva(ka)t pedig hozzáteszünk, a másodikban pedig fordítva.) (*1 pont*)
A 0-hoz legközelebbi összeg 1008, (*1 pont*)
vagy -1008. (*1 pont*)
Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Van sok egyforma 4×9-es téglalapunk. Ezekből nagyobb téglalapokat szeretnénk hézagmentesen, a kisebb téglalapok átfedése nélkül összerakni. Sikerülhet-e ez, ha a nagy téglalap oldalai

   (a) 20×71;

   (b) 19×72;

   (c) 21×72?

Megoldás

(a) A kis téglalapok területe $4 \cdot 9 = 36$ egység. (***1*** *pont*)
A nagy téglalap területe $20 \cdot 71 = 1420$, ami nem osztható 36-tal, ezért ez a téglalap nem rakható ki. (***1*** *pont*)

(b) A 19 egységnyi oldalt nem lehet kirakni 4 és 9 hosszú oldalak segítségével, (***1*** *pont*)
mert $19 = 2 \cdot 9 + 1 = 1 \cdot 9 + 10 = 0 \cdot 9 + 19$ és tudjuk, hogy legfeljebb két 9 hosszú oldalt használhatunk. Mivel a maradék egyik esetben sem osztható 4-gyel, ezért ez a téglalap sem rakható ki. (***2*** *pont*)

(c) Osszuk fel a 21×72-es téglalapot két téglalapra. Legyenek ezek 12×72-es, illetve 9×72-es méretűek. Az előbbi kirakható 3×8 kis téglalappal, a második pedig 18 téglalappal. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés
A c) résznél egyéb kirakás is természetesen 2 pontot ér, illetve minden olyan ábra is, amelyből egyértelműen látszik a kirakás mikéntje.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HATODIK OSZTÁLY

1. Az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokat hányféleképpen lehet úgy sorbarendezni, hogy nem állhat egymás mellett két páratlan szám?
(Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tehát egy megfelelő sorozat, míg a $3, 2, 1, 4, 5, 7, 6, 8, 9$ nem, hiszen az 5 és a 7 szomszédosak.)

Megoldás
Mivel 9 szám van és ebből 5 páratlan, amik nem állhatnak egymás mellett, ezért feltétlenül *páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan* sorrendben kell állniuk a számoknak. (***2** pont*)
Mivel más feltétel nincs, így minden olyan sorrend megfelelő, amelyben így állnak a számok.
A 4 páros számot a 4 helyre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen helyezhetjük el. (***2** pont*)
Hasonlóan az 5 helyre az 5 páratlan számot: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féleképpen. (***2** pont*)
Mivel a páratlanok és a párosak elhelyezése független egymástól, ezért összesen $24 \cdot 120 = 2880$ megfelelő elhelyezés van. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

2. Egy négyjegyű pozitív egész számról a következőket tudjuk:
1) Minden számjegye különböző.
2) Számjegyeinek összege megegyezik 2016 számjegyeinek összegével.
3) Számjegyeinek szorzata megegyezik 2016 számjegyeinek szorzatával.
Melyik a

   (a) legkisebb
   (b) legnagyobb

   ilyen szám?

Megoldás
Mivel a keresett számok számjegyeinek a szorzata 0, és minden számjegyük különböző, így mindkét számban pontosan egy 0 számjegynek kell szerepelnie. (***1** pont*)

(a) Mivel négyjegyű számról van szó, ezért az első számjegy nem lehet 0, és minél kisebb az első számjegy, annál kisebb a szám, ezért válasszuk az első számjegyet 1-nek. Ezen belül

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

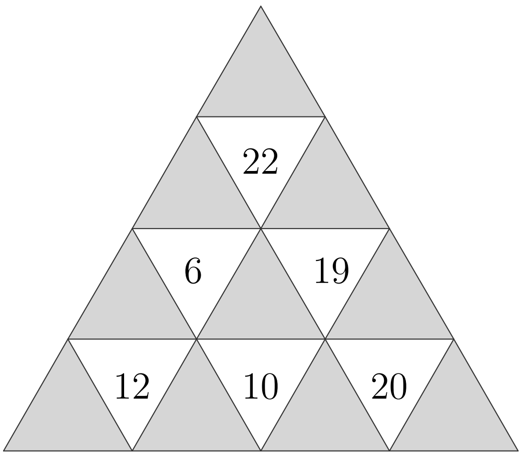
minél kisebb a második számjegy, annál kisebb a szám, és a második számjegy már lehet 0, így válasszuk ezt. (*1 pont*)
Mivel a számjegyek összege 9 $(2 + 0 + 1 + 6)$, ezért a harmadik és negyedik számjegy összegének 8-nak kell lennie. (*1 pont*)
Minél kisebb a harmadik számjegy, annál kisebb a szám. Mivel az első számjegy 1, így a legkisebb szóba jövő harmadik számjegy a 2. Vagyis a keresett szám az 1026. (*1 pont*)

(b) Minél nagyobb egy négyjegyű szám első számjegye, annál nagyobb a szám. Válasszuk tehát az első számjegyet a lehető legnagyobbra. Mivel a számjegyek mind különbözőek, a három legkisebb számjegy összege legalább 0+1+2=3. Ezért a legnagyobb számjegy legfeljebb 6 lehet, hiszen a jegyek összege 9. Az első számjegy tehát a 6-os. (*1 pont*)
Továbbra is a nagyobb számjegyeket minél előbbre érdemes tenni, hiszen annál nagyobb lesz a szám. Már csak a $2, 1, 0$ számjegyek használhatók. (*1 pont*)
Így a legnagyobb szám a 6210. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés
Mindkét részfeladat esetén a helyes válasz puszta közlése 1-1 pontot ér.

3. (a) Írjuk be 1-től 10-ig a számokat a szürke háromszögekbe úgy, hogy minden fehér háromszögben a vele oldallal szomszédos háromszögekbe írt számok összege szerepeljen!
(b) Lehet-e találni két kitöltést, amelyekben a középső háromszögbe írt szám különbözik?

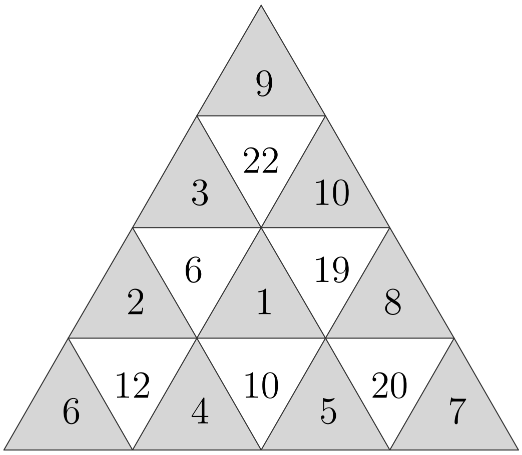


Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás

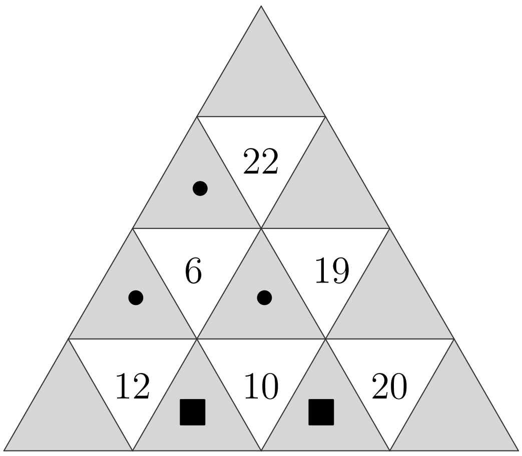
(a) Az egyetlen helyes kitöltés:



(***3*** *pont*)

(b) **1. megoldás**

Nézzük az ábrán •-tal jelölt három háromszögeket. Az ezekbe írt számok összege 6, tehát ezen a három mezőn kell lennie az 1, 2, 3 számoknak. (***1*** *pont*)

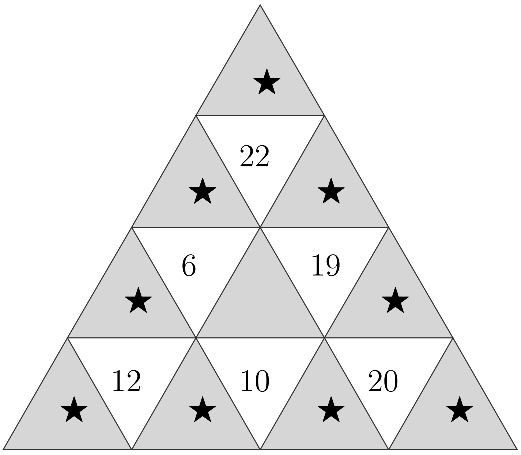


Tekintsük most az ábrán ■-tel jelölt két mezőt. A legkisebb két ideírható szám a 4 és az 5. (***1*** *pont*)
Emiatt a középső mezőbe csak az 1 kerülhet, hiszen a két ■-tel jelölt háromszögbe és a középsőbe írt számok összege 10. (***1*** *pont*)
Tehát nincs két olyan kitöltés, amelyben a középső mezőbe írt számok különböznek. (***1*** *pont*)

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

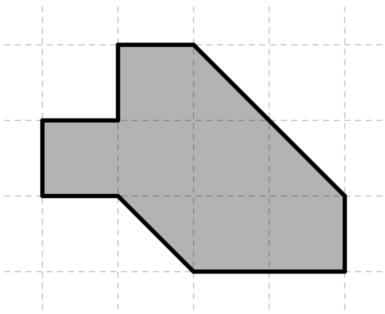


A 10 beírt szám összege $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$. (***1** pont*)
Tudjuk, hogy az ábrán ★-gal jelölt számok összege $22 + 12 + 20 = 54$. (***2** pont*)
A megjelölt számok között csak a középső mező száma nem szerepel, így annak feltétlenül 1-nek kell lennie. (***1** pont*)

4. Osszuk fel az itt látható alakzatot

   (a) 3
   (b) 5
   (c) 15

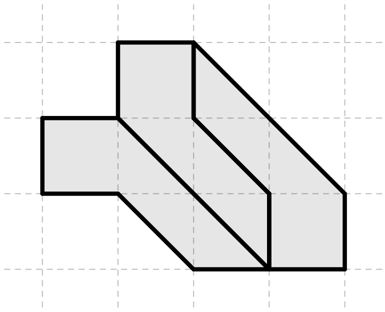
   egybevágó (tükrözést is megengedve egymással fedésbe hozható) részre!



Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

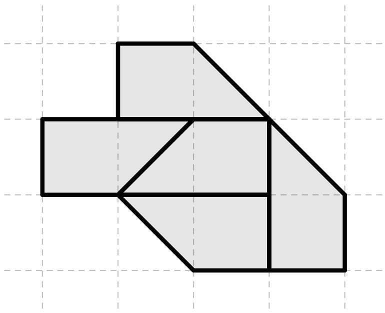
Megoldás

3 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



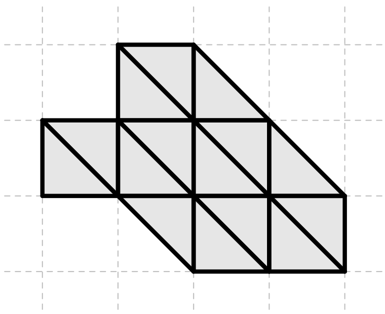
(***3*** *pont*)

5 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



(***2*** *pont*)

15 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



(***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

Mind a 3 részfeladatra egyéb megfelelő megoldások is léteznek, minden esetben az ezektől eltérő jó megoldásokért jár az adott résznek megfelelő részpontszám.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Ha valaki nem ad jó felosztást, de kiszámolja, hogy hány egység területűnek kell egy résznek lennie (a) 2,5 b) 1,5 c) 0,5), akkor azért összesen 2 pont jár. Ha csak egy részfeladatnál teszi ezt meg, akkor az 1 pontot ér.

5. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
,,Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan a felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 10 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd."
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

Megoldás

2015 aranytallér megszerezhető. (***1*** *pont*)

Világos, hogy ez a lehető legtöbb, hiszen 1 aranytallérnak mindenképpen maradnia kell minden lépés után. Az első típusú lépésben marad arany feltétlenül, hiszen pozitív szám fele is pozitív, míg a második lépés növeli az aranyak számát. (***2*** *pont*)

A következő lépéssorozatot követően 1 aranytallér marad a ládában, vagyis 2015 aranytallért szerez az, aki ezt végrehajtja:

$$2016 \xrightarrow{1)} 1008 \xrightarrow{1)} 504 \xrightarrow{2)} 514 \xrightarrow{2)} 524 \xrightarrow{2)} \ldots \xrightarrow{2)} 1024 \xrightarrow{1)} 512 \xrightarrow{1)} 256 \xrightarrow{1)} \ldots \xrightarrow{1)} 8 \xrightarrow{1)} 4 \xrightarrow{1)} 2 \xrightarrow{1)} 1.$$

(***4*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

Más lépéssorozatokkal is elérhető, hogy egyetlen aranytallér maradjon a ládában, természetesen azokért is jár a 4 pont.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HETEDIK OSZTÁLY

1. 20 teljesen azonos golyó belsejében elhelyeztük a pozitív egész számokat 1-től 20-ig, majd a golyókat egy dobozba tettük. Ezt követően egyesével elkezdjük kihúzni a golyókat és azonnal megállunk, ha az addig kihúzott golyókban lévő számok

   (a) szorzata

   (b) összege

   páros. Mindkét esetben add meg, hogy mi az a legkisebb szám, ahány húzásnál több biztosan nem történhetett.

Megoldás

A számok szorzata akkor és csak akkor lesz páros, ha van közöttük páros. (***1** pont*)

Tehát az első esetben az első páros számot tartalmazó golyó felbukkanásáig fog tartani a húzás. (***1** pont*)

Mivel 10 páratlan számot tartalmazó golyó van, így legfeljebb 11 golyót húzhattunk ki ebben az esetben. (***1** pont*)

Ha az első páros összegig húzunk, akkor ha az első golyóban páros szám van, akkor rögtön véget is ér a húzás. (***1** pont*)

Ha az első golyóban páratlan szám van, akkor a következő páratlan számot tartalmazó golyóig fog tartani a húzás. (***1** pont*)

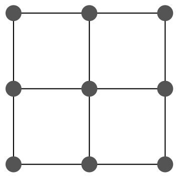
Mivel összesen 10 páros golyó van, így legfeljebb $1 + 10 + 1 = 12$ golyót húzhatunk ki ebben az esetben a dobozból. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

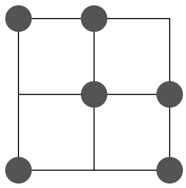
Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Egy 2×2-es négyzetrács 3×3 rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



Megoldás
6 pontot ki lehet választani például az ábrán látható módon. (***3** pont*)



Ha ki lehetne választani 7 pontot, a skatulyaelv alapján az egyik sorból mindhárom pontot ki kéne választani. (***2** pont*)
Ezen kívül még kell lennie 4 pontnak, tehát a maradék két sorból az egyikben legalább két pontnak kell lennie. (***1** pont*)
Azonban ez a két pont és a három kiválasztott pontot tartalmazó sor azon két pontja, melyek egy oszlopban vannak ezzel a két ponttal, téglalapot alkotnak. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés
A konstrukciónál ellenőrizni kell azt is, hogy a négy oldalfelező pont ne legyen kiválasztva, hiszen azok négyzetet (és így téglalapot) alkotnak.

3. Gondoltunk egy háromjegyű számra. Tudjuk, hogy az alábbi 7 állítás nem mind igaz, de az egymást követő állítások közül legalább az egyik igaz.
A) A szám osztható 7-tel.
B) A szám osztható 11-gyel.
C) A szám osztható 13-mal.
D) A szám osztható 77-tel.
E) A szám osztható 91-gyel.
F) A szám osztható 143-mal.
G) A szám utolsó számjegye 5.
Mi lehet a gondolt szám?

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás
Mivel $77 = 7 \cdot 11$ és $91 = 7 \cdot 13$, és a D) és E) állítások közül legalább az egyik igaz, a szám biztosan osztható 7-tel. (***1*** *pont*)
Hasonlóan, mivel $143 = 11 \cdot 13$, és az E) és F) állítások közül legalább az egyik igaz, a szám biztosan osztható 13-mal. (***1*** *pont*)
Tehát az A) és C) állítások biztosan igazak. Ha a B) állítás is igaz lenne, akkor a szám osztható lenne $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$-gyel, tehát nem lehetne háromjegyű. Így a B) állítás hamis. (***1*** *pont*)
Tehát a szám osztható 7-tel és 13-mal, de 11-gyel nem. Így a D) és F) állítások hamisak, az E) állítás igaz. (***1*** *pont*)
Mivel F) hamis, G)-nek igaznak kell lennie. Tehát a szám 5-ösre végződik, azaz 5-tel osztható és páratlan. (***1*** *pont*)
A szám 91-gyel is osztható az E) állítás miatt, így $5 \cdot 91 = 455$-tel is osztható. (***1*** *pont*)
Mivel a szám páratlan és háromjegyű, csak a 455 felel meg. Tehát a gondolt szám a 455. (***1*** *pont*)
Összesen: 7 pont

4. Van rengeteg 1×1-es és rengeteg 9×9-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

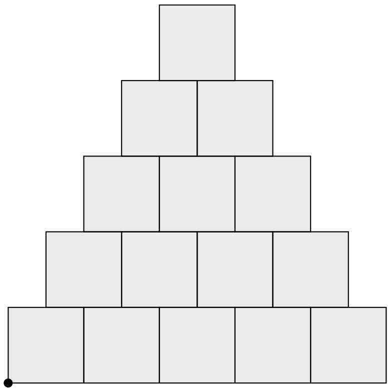
1. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222 - k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. (***2*** *pont*)
Mivel $80k$ osztható 10-zel, ezért $80k + 2222$ utolsó számjegye 2. (***1*** *pont*)
Négyzetszám utolsó számjegye viszont nem lehet 2. (***2*** *pont*)
Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2*** *pont*)
Összesen: 7 pont

2. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222 - k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. (***2*** *pont*)
Ez az érték biztosan páros, de a fele, $40k + 1111$ biztosan páratlan, így $80k + 2222$ nem osztható 4-gyel. (***1*** *pont*)
A páros négyzetszámok viszont 4-gyel is oszthatóak. (***2*** *pont*)
Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2*** *pont*)
Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

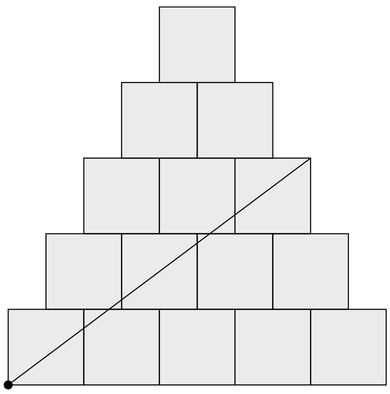
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Az ábrán látható alakzatot négyzetekből állítottuk össze. Határozd meg azt az egyenest, amely áthalad az alakzat bal alsó csúcsán (az ábrán feketével jelölve), és felezi az alakzat területét. Válaszodat indokold!



1. megoldás

Kössük össze a bal alsó csúcsot a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsával! Megmutatjuk, hogy az így kapott egyenes felezi az alakzat területét. (***2** pont*)



Tekintsük az alsó három sor bal szélén lévő 3-3 négyzetből álló alakzatot. Ez középpontosan szimmetrikus a középen lévő négyzet átlóinak metszéspontjára. (***1** pont*)
Mivel az egyenesünk áthalad ennek az alakzatnak a szimmetriaközéppontján, ezért felezi annak a területét. (***2** pont*)
Marad még a legfelső 3 négyzet az egyenes egyik oldalán, és a jobb alsó 3 négyzet az egyenes másik oldalán. Ezeknek a területe is egyenlő. (***1** pont*)
Így az egyenesünk felezi a 15 négyzetből álló alakzat területét. (***1** pont*)

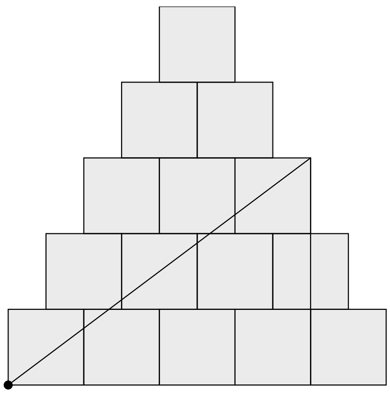
Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

Kössük össze a bal alsó csúcsot a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsával! Megmutatjuk, hogy az így kapott egyenes felezi az alakzat területét. (***2*** *pont*)



Állítsunk merőlegest a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsából az alakzatot alulról határoló egyenesre. (***1*** *pont*)

Így az egyenesünk alatt egy derékszögű háromszög keletkezik. (***1*** *pont*)

Ennek területe $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ négyzet területének felel meg. (***1*** *pont*)

Az egyenesünk ugyanezen oldalán még 1,5 négyzet található, így összesen 7,5 négyzetegységnyi terület található az egyenesünk egyik oldalán. (***1*** *pont*)

Ez éppen a 15 négyzetből álló alakzat területének a fele. Így az egyenesünk felezi a 15 négyzetből álló alakzat területét. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

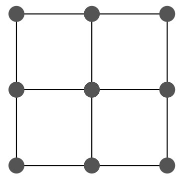
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

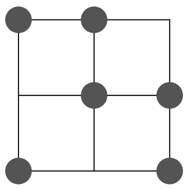
Megyei forduló

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Egy 2×2-es négyzetrács 3×3 rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



Megoldás
6 pontot ki lehet választani például az ábrán látható módon. (*3 pont*)



Ha ki lehetne választani 7 pontot, a skatulyaelv alapján az egyik sorból mindhárom pontot ki kéne választani. (*2 pont*)
Ezen kívül még kell lennie 4 pontnak, tehát a maradék két sorból az egyikben legalább két pontnak kell lennie. (*1 pont*)
Azonban ez a két pont és a három kiválasztott pontot tartalmazó sor azon két pontja, melyek egy oszlopban vannak ezzel a két ponttal, téglalapot alkotnak. (*1 pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés
A konstrukciónál ellenőrizni kell azt is, hogy a négy oldalfelező pont ne legyen kiválasztva, hiszen azok négyzetet (és így téglalapot) alkotnak.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

2. Van rengeteg 1×1-es és rengeteg 9×9-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

1. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222-k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k+(2222-k)=80k+2222$. (***2** pont*)
Mivel $80k$ osztható 10-zel, ezért $80k+2222$ utolsó számjegye 2. (***1** pont*)
Négyzetszám utolsó számjegye viszont nem lehet 2. (***2** pont*)
Tehát $80k+2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

2. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222-k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k+(2222-k)=80k+2222$. (***2** pont*)
Ez az érték biztosan páros, de a fele, $40k+1111$ biztosan páratlan, így $80k+2222$ nem osztható 4-gyel. (***1** pont*)
A páros négyzetszámok viszont 4-gyel is oszthatóak. (***2** pont*)
Tehát $80k+2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

3. Keressük meg azokat az $\overline{abcd}$ négyjegyű és $\overline{xyz}$ háromjegyű számokat, amelyekre a következők igazak: $\overline{abcd}=70\cdot\overline{xyz}$, $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-d$.

Megoldás
$d=0$, hiszen $70\cdot\overline{xyz}$ osztható 10-zel. (***1** pont*)
Egyszerűsítve az egyenlőséget: $\overline{abc}=7\cdot\overline{xyz}$. (***1** pont*)
x csak 1 lehet, különben $\overline{xyz}$ legalább 200, és akkor a 7-szerese már négyjegyű szám . (***1** pont*)
Mivel $z=c-d=c$, így c olyan szám, melynek 7-szerese ugyanarra a számjegyre végződik, mint c. Tehát $c=0$ vagy $c=5$. (***1** pont*)
Mivel $1=x=a-b$, így a eggyel több b-nél. a legalább 7 (hiszen $7\cdot\overline{xyz}$ legalább 700), így a következő 6 lehetőség van $\overline{abc}$-re: 760, 870, 980, 765, 875, 985. Ezek közül csak a 875 lesz jó. (***1** pont*)
A feladat egyetlen megoldása: $\overline{abcd}=8750$, $\overline{xyz}=125$. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés
A helyes megoldás közlése önmagában 2 pontot ér.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

4. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
,,Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 77 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog sem betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd."
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

Megoldás

Vegyük észre, hogy a 2016 osztható 7-tel. Ha egy lépés előtt az aranytallérok száma oszható 7-tel, a lépés után is az marad: 7-tel osztható páros számnak a fele is osztható 7-tel (például a számelmélet alaptétele alapján), és egy 7-tel osztható számot 77-tel növelve ismét 7-tel osztható számot kapunk, hiszen a 77 osztható 7-tel, és két 7-tel osztható szám összege osztható 7-tel. (***2*** *pont*)

Azt is észrevehetjük, hogy a ládában mindig marad legalább egy aranytallér: pozitív szám fele is pozitív, és pozitív számot növelve pozitív marad. (***1*** *pont*)

Így legalább 7 aranytallérnak maradnia kell a végén a ládában: 7 a legkisebb 7-tel osztható pozitív egész. (***1*** *pont*)

Ez meg is valósítható például a következő módon (mohó algoritmussal, csak akkor növelünk 77-tel, ha muszáj, mert felezni nem tudunk):

$$2016 \xrightarrow{1)} 1008 \xrightarrow{1)} 504 \xrightarrow{1)} 252 \xrightarrow{1)} 126 \xrightarrow{1)} 63 \xrightarrow{2)} 140 \xrightarrow{1)} 70 \xrightarrow{1)} 35 \xrightarrow{2)} 112 \xrightarrow{1)} 56 \xrightarrow{1)} 28 \xrightarrow{1)} 14 \xrightarrow{1)} 7.$$

(***2*** *pont*)

Így a megszerezhető aranytallérok maximális száma: 2016-7=2009. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

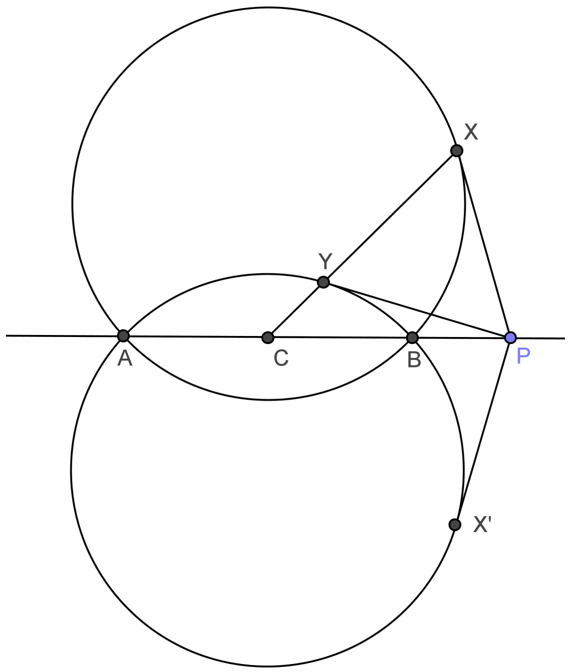
5. Adott két egyenlő sugarú kör, melyek egymást az A és a B pontban metszik. Felveszünk egy P pontot az AB szakasz B-n túli meghosszabbításán. A P pontból érintőt húzunk a két körhöz úgy, hogy az érintési pontok, X és Y az AB egyenesének ugyanarra az oldalára essenek. Tudjuk, hogy a rövidebb $\overset{\frown}{XB}$ és a rövidebb $\overset{\frown}{BY}$ körív együtt egy negyedkörívet tesz ki. Mekkora szöget zár be az XY és az AB egyenes?

Megoldás Az ábra jelöléseit használjuk. Tükrözzük az X pontot az AB egyenesre. X tükörképe, X' a másik körön lesz, mert a két kör szimmetrikusan helyezkedik el az AB egyenesre nézve (az egyenlő sugarak miatt). $PX = PX'$ a tükrözés miatt és $PX' = PY$, mert egy pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz egyforma hosszú.tehát $PX = PY$. (***3** pont*)

Mivel a rövidebb BX és a rövidebb BX' ív egyforma hosszú a tükrözés miatt, így a feladat feltétele alapján a rövidebb YX' ív egy negyedkörív. Ez pedig azt jelenti, hogy az $X'PY\sphericalangle$ szög derékszög (hiszen a PY és a PX' sugarak merőlegesek egymásra a negyedkörív miatt). (***1** pont*)

Jelölje a $BPY\sphericalangle$ szöget x. Ekkor $BPX\sphericalangle = BPX'\sphericalangle = 90° - x$, és így $YPX\sphericalangle = 90° - 2x$. Mivel az XYP háromszög egyenlőszárú, így $XYP\sphericalangle = YXP\sphericalangle = 45° + x$. Másrészt az $XYP\sphericalangle$ szög a CPY háromszög külső szöge, így egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Ebből azonnal következik, hogy a keresett szög, $PCY\sphericalangle = 45°$. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont



Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.