TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Kalmár László (matematikus)

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ

ÖTÖDIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. *Marcinak hétszer annyi pénze van, mint Gergőnek. Ha Marci adna 65 Ft-ot Gergőnek, akkor már csak kétszer annyi pénze lenne, mint Gergőnek. Hány forintja van Marcinak és Gergőnek együtt?*

Megoldás:

I. megoldás: Fordítsuk le a szöveget matematikai nyelvre! Legyen a Gergő pénze x, akkor a Marcié 7x. Ha Marci átad 65 Ft-ot, akkor már csak 7x – 65 Ft-ja marad. Gergő kap 65 Ft-ot, tehát x + 65 Ft-ja lesz. 3 pont

Ha ezt megkétszerezem, akkor egyenlők lesznek, vagyis: 7x - 65 = 2 ·(x + 65). Megoldva: x = 39. 3 pont

Ellenőrzés: Gergőnek 39 forintja van, Marcinak hétszer ennyi, azaz 273. Ha Marci átad 65 Ft-ot, akkor neki 208, Gergőnek pedig 104 Ft-ja lesz.

A két fiú pénze együtt: 39 + 39 ·7 = 312. 1 pont

A tipikus hibák helytelen egyenletfelírásból származnak, pl.: 7 x = 2 (x + 65), ahonnan a válasz x = 26**.** Ha a 7 x - 65 = 2 x egyenletet írja fel a tanuló, akkor x = 13 adódik.

A fentieket nyitott mondat formájában is leírhatja a tanuló. $7\cdot \quad -65 = 2\cdot\left(\quad +65\right)$ Stb.

II. megoldás:

Ha Marcinak 7-szer annyi pénze van, mint Gergőnek, akkor kettejük pénzének 7 nyolcad részével rendelkezik Marci, Gergő pedig az 1 nyolcaddal. 2 pont

A 65 Ft átadása után 2 harmad, 1 harmadra változik a pénzük aránya. 2 pont

Tehát $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{21-16}{24}=\frac{5}{24}$ rész jelenti a 65 Ft-ot. Innen az egész pénz a 65 ötödének a 24-szerese, azaz 312 Ft. 2 pont

Nyilvántartási száma: 00516-2008
FAT lajstromszám: AL-0022

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Kalmár László (matematikus)

Ellenőrzés: lásd az I. megoldásnál. 1 pont.

Ez utóbbi megoldást szemléltethetjük szakaszokkal is.

Próbálgatásos módszer: Elképzelhető, hogy lesznek olyan tanulók, akik próbálgatással oldják meg a feladatot. Ha abból indul ki, hogy Marcinak legalább 65 forintja van és innen okoskodik tovább pl. Marcinak 70 forintja van, akkor Gergőnek heted ennyi, tehát 10 Ft, de ez nem jó. S. í. t. lépked a 7 többszörösein amíg meg nem találja a megoldást. Az ilyen és hasonló megoldásokért elegendő 5 pontot adni.

2. *Egy négyjegyű számhoz hozzáadtuk az utolsó három jegyéből képzett számot, majd az utolsó két jegyéből képzettet, végül az utolsó jegyét. Így eredményül 3042-őt kaptunk. Mi lehetett az eredeti négyjegyű szám?*

Megoldás:

Fordítsuk le a feladat szövegét "matematikai nyelvre"!

Írásbeli műveletként fogjuk kiokoskodni a feladat megoldását. Az egyesek helyén az a kérdés, hogy "hányszor 4 végződik 2-esre". Kétféle válasz lehetséges: a, $3 \cdot 4 = 12$ vagy b, $8 \cdot 4 = 32$.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ BCD \\ CD \\ + \quad D \\ \hline 3042 \end{array}$$

Az **a**, esetben az egyesek helyi értékén 1 a maradék, ezért C-nek is 1-nek kell lennie a tízesek oszlopán. A tízesek helyi értékén nem lesz maradék. A százasok oszlopán B = 0 vagy B = 5 esetén lesz az eredmény 0. Az első esetben A = 2, a másodikban pedig A = 3. Tehát a keresett négyjegyű számok 3013, illetve 2513. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott eredmények helyességéről:

3013 + 013 + 13 + 3 = 3042 illetve 2513 + 513 +13+3 = 3042.

<u>Pontozás</u>: az egyik megoldásért 2 pont, mindkettőért összesen 3 pont.

A **b**, esetben D = 8, maradék 3. Tehát C-nek 7-nek kell lenni és itt a maradék 2, amit átviszünk a százasok helyi értékére. Látható, hogy a B vagy 4, vagy 9 kell legyen. B = 4 esetén A = 2, ha B = 9, akkor A = Tehát a keresett négyjegyű számok 2478, illetve 1978. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott eredmények helyességéről:

2478 + 478 + 78 + 8 = 3042 illetve 1978 + 978 + 78 +8 = 3042

<u>Pontozás</u>: az egyik megoldásért 2 pont, mindkettőért összesen 3 pont.

A teljes ellenőrzésért 1 pont, <u>összesen</u> 7 pont. Elég megtalálni a megoldásokat, indoklást ne várjunk, hogy miért nincs több.

3. *Képzeld el, hogy leírtuk a teljes szorzótáblát* $1\cdot 1=1$*-től* $10\cdot 10=100$*-ig. Tehát 100 darab szorzást írtunk le. Mivel egyenlő a kapott szorzatok összege? Számolj minél ötletesebben! (Neked nem kell a teljes szorzótáblát leírnod, csak ha nagyon akarod.)*

<u>I. megoldás:</u>

Vegyük észre, hogy a fenti összeg egyenlő a

$(1+2+3+...+9+10)\cdot(1+2+3+...+9+10)=55\cdot 55=3025$ 7 pont

<u>II. megoldás:</u>

Számoljuk ki az 1-es szorzótábla eredményeit. $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$.

A kettes szorzótábla eredményei 2-szer akkorák lesznek mint 55, tehát 110.

A hármas szorzótábla eredményei 165, s.í.t.

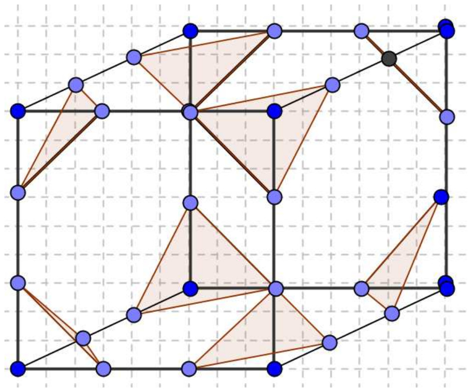
Összegezve $55+110+165+220+275+330+385+440+495+550=3025$. Itt lehet a "kis Gauss" módszert is alkalmazni, de az is elfogadható, ha írásbeli műveletként kiszámolja a versenyző.

Kalmár László (matematikus)

Pontozás: A helyes eredmény 3 pont. Ha a tanuló leírásából a helyes kiszámítási eljárás is kiderül, akkor a teljes 7 pontot adjuk meg. Ha jó az elgondolása, de elszámol, akkor legfeljebb 2 pontot vonjunk le.

4. *Egy kocka minden élét 3 egyenlő részre osztottuk. Minden csúcsnál kiválasztottuk azt a 3 harmadoló pontot, amely a legközelebb van a kiválasztott csúcshoz, majd ezeken keresztül egy síkkal levágtuk a kocka "sarkait". A levágott testeknek négy csúcsa van, a nevük tetraéder (háromszög alapú gúla, négylapú test). A nyolc levágás után megmaradt testnek hány éle, csúcsa, lapja van? Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a határoló lapok?*

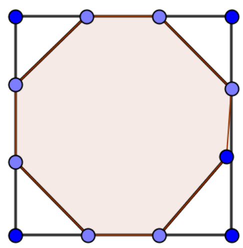
Megoldás:



Élek száma: Az eredeti kocka minden élének megmarad 1 harmada, tehát ez 12 élt jelent a maradék testnél. Minden levágott sarki tetraédernél bejön még 3-3 él, ez 24 új él. Összesen 12 + 24 = 36 éle lesz a maradék testnek.

2 pont

Csúcsok száma: Az eredeti kocka minden csúcsát levágtuk. A csúcsoknál keletkezett síkmetszetek mindegyike háromszög, tehát itt 3 új csúcs lép be. Ez összesen $8 \cdot 3 = 24$ csúcsot jelent a maradék test vonatkozásában. 2 pont



Lapok száma: A kocka eredeti hat lapjából maradnak meg részek, továbbá új határoló lapként lépnek be a sarkokon keletkezett háromszögek. Ezek száma 8. Tehát 8 + 6 = 14 határoló lap lesz.

2 pont

A határoló lapok közül nyolc szabályos háromszög, a többi hat pedig nyolcszög, s ezeknek minden második oldala egyenlő hosszú. 1 pont

Megjegyzés: A határoló lapok tulajdonságainak megnevezésénél minden olyan megoldást elfogadhatunk, amely utal a fenti tulajdonságokra, de nyelvileg, matematikailag nem elég pontos.

Nyilvántartási száma: 00516-2008
FAT lajstromszám: AL-0022

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Kalmár László (matematikus)

5. *Hány olyan háromjegyű szám van, amely számjegyei között van páros és páratlan számjegy is?*

I. megoldás:

900 darab háromjegyű szám van. Ezek számából le kell vonni azokat, amelyekben csak páros számjegy van, illetve csak páratlan számjegyet tartalmaznak.

a, Csak páros számjegyet tartalmazók száma. A százasok helyén nem állhat 0, csak 2, 4, 6, és 8. A tízesek és egyesek helyén már mindenféle páros számjegy állhat. Tehát ezek száma: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. 3 pont

b, Csak páratlan számjegyet tartalmaznak. A százasok, tízesek, egyesek helyi értékén egyaránt ötféle számjegy állhat. Az ilyen számok száma $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. 3 pont

A feladat kérdésére a válasz 900 – 100 – 125 = 675. 1 pont

A megoldás során az "összes – rossz = jó" leszámláló módszert alkalmaztuk.

II. megoldás:

100-től 109-ig mind a 10 szám jó, 110-től 119-ig 5 db, aztán 120-tól 129-ig megint 10, utána megint 5, stb., így az 1-essel kezdődő számok közül 10+5+10+5+10+5+10+5+10+5 = 75 lesz jó. 2 pont

Utána 200-tól 209-ig 5 db, utána 10, 5, 10, 5, … ez 299-ig megint 75 lehetőség. 2 pont

A 3-assal kezdődőeknél ugyanaz van, mint az 1-essel kezdődőeknél, tehát 75 lehetőség, és ugyanígy a 4-essel, 5-össel, …, 9-essel kezdődőeknél. 2 pont

Tehát minden "százas kupacban" 75 ilyen szám van.

Tehát $9 \cdot 75 = 675$ ilyen szám van. 1 pont

A megfelelő leszámlálási eljárás felfedezéséért legfeljebb 6 pontot adjunk, még akkor is, ha ez csak a megoldásból derül ki, de nyelvileg nem fogalmazza meg a tanuló. Ha kevesebb megoldást talál, akkor egy arányos pontszámot adjunk.

Valamennyi feladat hibátlan megoldása 7 pontot ér, így az elérhető maximális pontszám 35.
Budapest, 2014. március 22.

Nyilvántartási száma: 00516-2008
FAT lajstromszám: AL-0022