TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2021. április 23.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Tölts ki egy 4×4-es táblázatot 1-es és 2-es számjegyekkel úgy, hogy a balról jobbra és fentről lefele kiolvasható négyjegyű számok között a lehető legtöbb különböző legyen.

1	2	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
1	2	2	1

Például, az ábrán látható kitöltésből öt különböző négyjegyű szám olvasható ki: 1211, 1212, 1221, 2122, 2212.

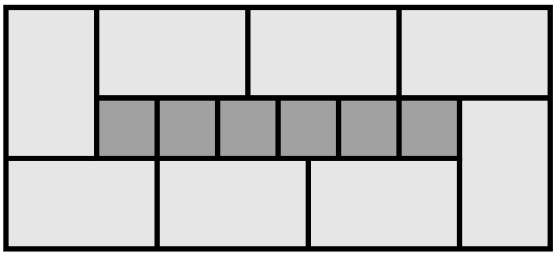
A megoldás leírásokor elegendő egy kitöltött táblázatot megadnod és felsorolnod az ebből kiolvasható négyjegyű számokat. Nem kell indokolnod, hogy más kitöltésből nem lehet ennél többféle négyjegyű számot kiolvasni.

Megoldás. Nyolc különböző négyjegyű szám elérhető, például az alábbi kitöltéssel:

1	1	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
2	2	2	1

Itt a kiolvasható négyjegyű számok: 1111, 1122, 1212, 1221, 1222, 2122, 2212, 2221.
Több nyilván nem lehet, hiszen 4 sor és 4 oszlop van.

2. Nyolc egyforma téglalapból és hat egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Mekkora a nagy téglalap területe, ha a négyzetek területe egyenként 4 cm^2?

Megoldás. Mivel a négyzetek területe egyenként 4 cm^2, ezért oldalhosszuk 2 cm.

Az ábrán látszik, hogy öt ilyen négyzetoldal éppen olyan hosszú, mint a külső téglalapok hosszabbik oldalának kétszerese. Ezért a téglalapok hosszabbik oldala 5 cm.

Az is világos az ábráról, hogy a téglalapok rövidebb oldala éppen egy négyzetoldallal, azaz 2 cm-rel rövidebb a hosszabbiknál. Tehát a rövidebb oldal hossza 3 cm.

Így a nagy téglalap hosszabb oldala $5+5+5+3=18$ cm, a rövidebb oldala $5+3=8$ cm, így a területe $18 \cdot 8 = 144$ cm^2.

3. a) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni kettő darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és három darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
b) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
Megengedett, hogy egy szorzatban többször szerepeljen ugyanaz a szorzótényező.

Megoldás. a) Nincs. Egy háromjegyű szám legalább 100 és kevesebb, mint 1000. Ezért két háromjegyű szám szorzata legalább 10000 és kevesebb, mint $1000 \cdot 1000 = 1000000$ (egymillió).

Viszont három háromjegyű szám szorzata legalább $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1000000$, ami több, mint a legnagyobb lehetséges kéttényezős szorzat.

b) Van ilyen szám. Például, a 100000000 (százmillió) előáll négy darab háromjegyű és három darab háromjegyű szám szorzataként is:

$$100000000 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 400 \cdot 500 \cdot 500$$

Érdekességképp megjegyezzük, hogy olyan példa is van, amelyben a szorzótényezők csupa különböző számok, például:

$$100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 = 404 \cdot 510 \cdot 515,$$

hiszen

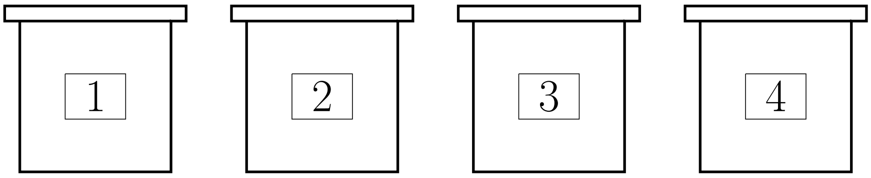
$$(4 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 = (4 \cdot 101) \cdot (5 \cdot 102) \cdot (5 \cdot 103).$$

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Anna, Béla, Csaba és Dóra között kisorsoltak egy-egy csokival töltött dobozt. A dobozok 1-től 4-ig vannak megszámozva, és az egyik dobozban 1, a másikban 2, a harmadikban 3 és a negyedikben 4 tábla csoki van. Miután a gyerekek megtudták, hogy ki melyik dobozt kapta és benne hány tábla csoki volt, a következő igaz kijelentéseket tették:

- Anna: Dóra eggyel több tábla csokit kapott, mint én.
- Béla: Anna eggyel kisebb sorszámú dobozt kapott, mint én.
- Csaba: Anna és Béla összesen annyi tábla csokit kaptak, mint én.
- Dóra: Egyik dobozban sem volt ugyanannyi csoki, mint ahányas számot a dobozra írtak.

Ki melyik dobozt kapta, és melyik dobozban hány tábla csoki volt?



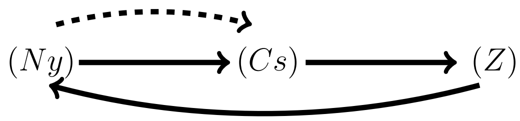
Megoldás. Anna és Béla összesen annyi csokit kapott, mint Csaba, aki ezért 3 vagy 4 tábla csokit kapott. Ha 3 tábla csokit kapott volna, akkor Dóra kapta volna a 4 táblát, de ekkor nem lenne igaz, hogy Dóra egy táblával többet kapott Annánál. Tehát Csaba 4 táblát kapott, amely csak 1+3 alakban áll elő összegként, így Dóra 2 táblát, Anna eggyel kevesebbet, tehát 1 táblát, Béla 3 táblát kapott.

A sorszámokat tekintve Anna és Béla két egymást követő számot kapott, amely nem lehet az 1 és 2 (hiszen ekkor Anna dobozának sorszáma megegyezne a csoki mennyiségével), sem a 2 és 3 (ekkor meg Béla sorszáma és csokimennyisége lenne egyenlő), tehát csak 3 és 4 lehet. Mivel Dóráé nem lehet 2-es sorszámú, ezért övé az 1-es, és Csabáé a 2-es. Ekkor valóban minden a négy kijelentés igaz.

	Sorszám	Csoki
Anna	3	1
Béla	4	3
Csaba	2	4
Dóra	1	2

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Van egy autóm, amely központi zárral van felszerve. Ez háromféle állapotban lehet: (Z) állapotban zárva, (Ny) állapotban nyitva van az összes zár; míg (Cs) állapotban a csomagtartó nyitható, de az utastér nem. A zárhoz távirányító is tartozik, melyen egyetlen gomb van. Ennek megnyomásával a központi zár (Ny) állapotból (Cs)-be, (Cs)-ből (Z)-be míg (Z)-ből (Ny)-be kapcsol. Továbbá, ha a zár (Ny) állásban van és egy teljes percig nem történik gombnyomás, akkor a központi zár automatikusan (Cs) állásba kapcsolja magát.

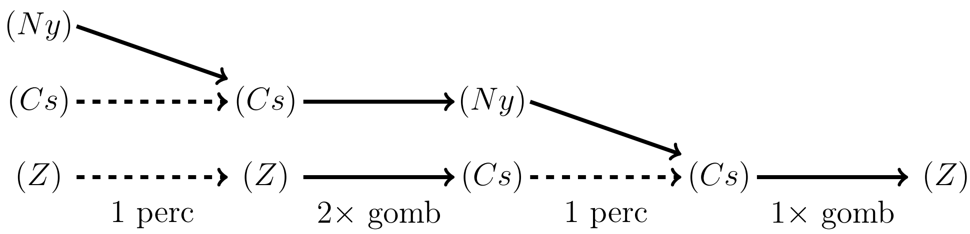


Sajnos nem emlékszem, hogy bezártam-e az autót, amikor a ház előtt hagytam. Nincs kedvem visszamenni a kocsihoz, de szerencsére a távirányító az ablakból is működik. Hogyan tudom elérni a lehető legkevesebb gombnyomással, hogy a központi zár biztosan (Z) állapotba kerüljön?
Az autó kezdetben bármelyik állapotban lehet és az ablakból nézve nem lehet megkülönböztetni az állapotokat.

Megoldás. 3 gomnyomással garantálni lehet, hogy a zár (Z) állapotba kerül, amennyiben az első gombnyomás előtt, illetve a második és harmadik gombnyomás között is várunk egy-egy percet.

Miért biztos, hogy ennek a végén (Z) állapotban lesz a zár?

Miután az elején vártunk 1 percet, a zár biztosan (Cs) vagy (Z) állapotban lesz. Ezután kétszer egymás után megnyomjuk a gombot, ezzel a zár (Ny) vagy (Cs) állapotba kerül, tehát további 1 perc várakozás után biztosan (Cs) állapotba kerül. Ha az 1 perc már biztosan letelt, akkor megnyomjuk még egyszer a gombot, és így (Z) állapotban lesz a zár.



Tehát 3 gombnyomással megoldható a feladat. Most gondoljuk meg, hogy kevesebb gombnyomás miért nem elég. Erre kétféle gondolatmenetet is mutatunk.

Nyilván kell legalább egy gombnyomás, különben (Cs) állapotból nem tudnánk kimozdulni.

1. gondolatmenet. Ha csak egyszer nyomjuk meg a gombot, és kezdetben a zár (Z) állapotban volt, akkor a gombnyomás után (Ny) állapotba kerül, onnan 1 perc után (Cs)-be, de tovább már nem változik. Nem jutottunk el (Z)-be.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Ha kétszer nyomjuk meg a gombot, és a zár kezdetben (Cs) állapotban volt, akkor az első gombnyomás után (Z) állapotba kerül, a második gombnyomás után pedig (Ny)-be. Ezeket a változásokat nem befolyásolja az, hogy a gombnyomások között várakozunk-e. Innen 1 perc után automatikusan (Cs)-be fog kerülni, de tovább már nem változik. Tehát nem jutottunk el (Z)-be.

2. gondolatmenet. Nézzük meg, hogy a (Z) állapot esetén hány gombnyomás kell ahhoz, hogy újra (Z) állapotba kerüljön a kocsi. Könnyen látható, hogy 3-nál kevesebb gombnyomás esetén csak 0 vagy 2 nyomással oldható meg.

Ezzel szemben, ha kezdetben (Cs) állapotban voltunk, akkor csak pontosan 1 nyomással juthatunk a zárva állapotba. Vagyis nem lehetséges 3-nál kevesebb nyomásból biztosan bezárni az ajtót.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.