TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ

HATODIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Valamennyi feladat hibátlan megoldása 7 pontot ér, így az elérhető maximális pontszám 35. A továbbküldés feltétele: minimum 20 pont elérése és legyen a versenyzőnek legalább egy teljes értékű megoldása, tehát 7 pontos.

1. Keresd meg mindazon tízes számrendszerben felírt természetes számokat, amelyek számjegyeik összegének 13-szorosával egyenlők!

Megoldás:

Kétjegyűek között nincs ilyen szám: $10a+b=13\cdot(a+b)\ \Rightarrow\ 0=3a+12b$, ami a számjegyek körében lehetetlen. **1 pont**

Nézzük a háromjegyűeket! $100a+10b+c=13\cdot(a+b+c)$. **1 pont**

Rendezve: $87a=3b+12c$. Egyszerűsítsünk 3-mal: $29a=b+4c$. Belátható, hogy a értéke csak 1 lehet (Miért?). Tehát $29=b+4c$. A megoldások:

b = 1 és c = 7; b = 5 és c = 6; b = 9 és c = 5

A keresett számok: 117, 156, 195. **3 pont**

Be kell még látnunk a teljeség miatt, hogy a négyjegyűek között nincs megoldás. $1000a+100b+10c+d=13\cdot(a+b+c+d)$. Lehetetlen mert a baloldal a = 1 esetén is nagyobb, mint a jobboldal maximuma. A jobboldal maximuma $13\cdot(9+9+9+9)=468$. Nincs több megoldás. **2 pont**

2. Egy falu határában gabonaföldet, gyümölcsöst, zöldségkertészetet, halastavat és legelőt alakítottak ki az évek során. A földterületek nagyságáról csak annyit tudunk, hogy hektárban mérve mindegyik egész szám volt. Az első négy terület nagysága a falu határának $\frac{15}{81}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{24}{80}$ része volt. A többi területet meghagyták legelőnek. Legkevesebb hány hektár lehetett a legelő területe?

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Megoldás:

Kevés számolás után rájöhetünk, hogy nem érdemes a törteket annyira leegyszerűsíteni, hogy a számláló és a nevező relatív prím legyen. Helyette így érdemes $\frac{15}{81}+\frac{7}{24}+\frac{4}{21}+\frac{24}{80}=\frac{5}{27}+\frac{7}{24}+\frac{4}{21}+\frac{12}{40}$. **2 pont**

Egyszerűsítés után a nevezők egyik közös többszöröse $27\cdot 8\cdot 7\cdot 5=7560$. **1 pont**

Ezek után a törtek így alakulnak:

$$\frac{5}{27}+\frac{7}{24}+\frac{4}{21}+\frac{3}{10}=\frac{1400+2205+1440+2268}{7560}=\frac{7313}{7560}$$ **2 pont**

A 7313 és a 7560 legnagyobb közös osztója 1, ezért a legelő a falu határának $\frac{247}{7560}$ része. A falu határa tehát legalább 7560 hektár. s a legelő legalább 247 hektár. **2 pont**

3. Hány olyan különbözőnek tekinthető téglatest van, amelynek a térfogata 2013 cm^3 és oldalai egész számok?

Megoldás:

A 2013 törzstényezős alakja $3\cdot 11\cdot 61$. **2 pont**

A lehetőségeket táblázatban adjuk meg:

a	1	1	1	1	3
b	1	3	11	61	11
c	2013	671	183	33	61

Minden lehetőség 1 pontot ér. **5 pont**

Megjegyzés: A 7 pontot akkor is megadhatjuk, ha a versenyző nem írja fel a törzstényezős alakot, de megadja az összes lehetőséget hiánytalanul.

Legfeljebb **2 pontot** adjunk, ha a tanuló a 671-et, illetve a 183-at törzsszámként kezeli.

4. A 13, 17, 37, 79 prímszámokból szintén prímszámokat kapunk, ha számjegyeiket felcseréljük. Létezik-e olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű prímszám, amelynek számjegyeit tetszőlegesen felcserélve szintén prímszámokat kapunk?

Megoldás:

A keresett háromjegyű számban az 5-ös és a páros számok nem szerepelhetnek. Maradt tehát 1, 3, 7, 9. **1 pont**

Négy esetet kell átgondolnunk. **1 pont**

Az oszthatósági szabályok alapján a 3-mal való oszthatóság vizsgálata egyszerű, de felesleges. A 7-tel való oszthatóságot „fejben” is könnyű ellenőrizni. A 11-gyel való oszthatósághoz már kell egy kis matematikai iskolázottság. **Erre nem kell pontot adni.**

a, 1, 3, 7. Nem jó, mert a $371 = 7 \cdot 53$. **1 pont**

b, 1, 3, 9. Itt a 11-gyel való oszthatóság szabálya alapján cáfolhatunk, de annak ismerete nélkül is beláthatjuk. $319 = 11 \cdot 29$ vagy $913 = 11 \cdot 83$ **1 pont**

c, 1, 7, 9. Nem jó, mert $791 = 7 \cdot 113$ **1 pont**

d, 3, 7, 9. Nem jó, mert $973 = 7 \cdot 139$ vagy $793 = 13 \cdot 61$. **1 pont**

Tehát nem léteznek a feladat szövegének megfelelő prímszámok. **1 pont**

5. Mindegyik háromjegyű természetes számot elosztottuk a saját számjegyei összegével. Mekkora volt a legnagyobb maradék?

Megoldás:

Tudjuk, hogy egy osztási műveletben a maradék legalább 1-gyel kisebb az osztónál. A legnagyobb számjegyösszeg a 27, a legnagyobb maradék 26 lehetne, ami csak a 999-ben léphetne fel. Itt az osztási maradék 0, mert a 999-ben a 27 megvan 37-szer, tehát nem jöhet szóba. Így 26 maradék nem lehet. **2 pont**

A számjegyösszeg lehetne 26 is (a maradék pedig 25): a 899-ben, 989-ben és a 998-ban. Az osztásokat elvégezve látható, hogy a maradék rendre 15, 1, 10. A 25 maradék nem lehet. **2 pont**

A számjegyösszeg lehet 25 is. A 25-tel való osztás maradéka könnyen megállapítható a közismert oszthatósági szabály ismeretében. Végiggondolva a szóba jöhető eseteket (799, 979, 997, 889, 898, 988) látható, hogy a 799 osztva a számjegyei összegével, a maradék 24. Ennél nagyobb maradék tehát nincs. **3 pont**