TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Hány olyan 4-jegyű szám van, melyben nincs 0 számjegy, a számjegyek összege 11, és minden számjegye osztható a nála kisebb számjegyekkel?

1. megoldás
Ha a legkisebb jegy 2, akkor az összeg páros lenne, ha nagyobb, akkor 11-nél több. Tehát a legkisebb jegy az 1. (***1** pont*)
Négy darab 1-es nyilván nem megfelelő. Három darab 1-es esetén a negyedik számjegy 8-as, ilyen számból 4 darab van: 1118, 1181, 1811, 8111. (***1** pont*)
Két darab 1-es esetén a másik két jegy összege 9, és a kisebb osztója a nagyobbnak. Ez csak a 3 és a 6 lehet, ezekkel 12-féle számot tudunk alkotni. (***1** pont*)
Egy darab 1-es esetén a fennmaradó számok összege 10, és közülük a legkisebb mindegyiknek osztója. Ezért ez csak 2-es lehet. A két legnagyobb jegy összege 8, és az egyik osztója a másiknak. Két lehetőség van: 2+6 vagy 4+4. Mindkét esetben 12-féle szám készíthető. (***3** pont*)
Összesen tehát $4 + 12 + 12 + 12 = 40$ megfelelő négyjegyű szám van. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

2. megoldás
Mivel négy darab páratlan szám összege nem lehet 11, ezért a számjegyek között van páros. Emiatt a legnagyobb számjegy is páros. (***1** pont*)
Ha a legnagyobb számjegy 8, akkor csak három 1-essel kaphatunk 11-es összeget. Ez 4 darab megfelelő szám: 1118, 1181, 1811, 8111. (***1** pont*)
Ha a legnagyobb számjegy 6, akkor a fennmaradó jegyek (melyek összege 5) 1-esek, 2-esek és 3-asok lehetnek. Ezekből kétféleképp kaphatunk 5-öt: 3+1+1 vagy 2+2+1. Mindkét esetből 12-féle számot készíthetünk. (***2** pont*)
Ha a legnagyobb számjegy 4, akkor abból az összeg miatt pontosan kettő kell ($4 + 2 + 2 + 2 < 11 < 4 + 4 + 4$). A maradék két számjegy összege 3, így ezek egy 1-es és egy 2-es. Az 1, 2, 4, 4 számjegyekből is 12-féle szám készíthető. (***2** pont*)
A legnagyobb számjegy nem lehet 2, mert akkor legfeljebb 8 lehetne a jegyek összege. Összesen tehát 4+12+12+12=40 megfelelő négyjegyű szám van. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző csak felsorolja a megfelelő négyjegyű számokat, de nem bizonyítja, hogy nincs több, akkor legfeljebb **4 pont**ot kaphat. Legfeljebb 15 megfelelő szám felsorolásáért **1 pont**, legfeljebb 30 megfelelő számért **2 pont**, legfeljebb 39 megfelelő szám felsorolásáért **3 pont** jár.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. A Noé bárkája című játékban Oroszlán (O), Panda (P), Víziló (V), Zsiráf (Zs), Zebra (Z) és Kenguru (K) utaznak a bárkán egymás mögött egyesével ülve. Minden ülésen kétféleképp ülhetnek: menetirány szerint előre, vagy háttal, hogy beszélgethessenek az előttük, vagy a mögöttük ülővel. (Ha nem akar beszélgetni, attól azért ülhet háttal is, de beszélgetni csak egymás felé fordulva lehet.) Tudjuk a következőket:
1) Panda és Zebra nem szomszédos Oroszlánnal;
2) Zsiráf előzi Vízliót-t és Pandát;
3) Zsiráf és Kenguru, valamint Víziló és Oroszlán egymás felé fordulva beszélgetnek;
4) Zebra legalább egy állatot lát a többiek közül;
5) Zsiráf, Víziló és Panda menetiránynak háttal ülnek.
Hányféle ülésrend lehetséges? (Két ülésrend különböző, ha legalább egy állat másutt, vagy más irányba nézve ül.)

Megoldás
Az 5) és 3) feltételek miatt Zsiráf mögött közvetlenül ül Kenguru, Víziló mögött közvetlenül pedig Oroszlán. 2) miatt az utóbbi páros hátrébb ül az előbbinél, így ha a bárka balról jobbra halad, akkor az ülésrend ilyen: $\ldots \overrightarrow{O}\overleftarrow{V} \ldots \overrightarrow{K}\overleftarrow{Zs} \ldots$ (***2** pont*)
1) miatt Oroszlán mögött nem ülhet sem Panda, sem Zebra, így ő a leghátsó. (***1** pont*)
2) miatt Zsiráf előtt nem ülhet Panda, így vagy Zebra ül legelöl, vagy Zsiráf. (***1** pont*)
Ha Zebra a legelső, akkor ő 4) miatt hátrafelé néz, Panda pedig csak Víziló és Kenguru között ülhet, hátrafelé. Ekkor az egyetlen lehetséges ülésrend: $\overrightarrow{O}\overleftarrow{V}\overleftarrow{P}\overrightarrow{K}\overleftarrow{Zs}\overleftarrow{Z}$. (***1** pont*)
Ha Zsiráf a legelső, akkor Zebra és Panda a középső két helyen ülhetnek tetszőleges sorrendben, Zebra bármelyik irányba nézhet, Panda csak hátrafelé. Ez további 4-féle ülésrend:

$$\overrightarrow{O}\overleftarrow{V}\overleftarrow{P}\overleftarrow{Z}\overrightarrow{K}\overleftarrow{Zs},\quad \overrightarrow{O}\overleftarrow{V}\overleftarrow{P}\overrightarrow{Z}\overrightarrow{K}\overleftarrow{Zs},\quad \overrightarrow{O}\overleftarrow{V}\overleftarrow{Z}\overleftarrow{P}\overrightarrow{K}\overleftarrow{Zs},\quad \overrightarrow{O}\overleftarrow{V}\overrightarrow{Z}\overleftarrow{P}\overrightarrow{K}\overleftarrow{Zs},$$

így összesen **5**-féle ülésrend lehetséges. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

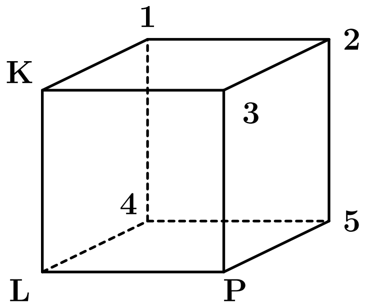
3. András, Béla és Csaba futóversenyeket rendeznek. Minden verseny után, az utolsó helyezett megduplázza az első helyezett pénzét. Kezdetben Andrásnak 55, Bélának 30, Csabának pedig 35 forintja volt. Hány versenyt rendeztek legalább, ha a végén mindenkinek ugyanannyi pénze lett? (A versenyek ideje alatt senki se kapott máshonnan pénzt, illetve senki se költött közben a pénzéből.)

Megoldás
Legalább három fordulóra van szükség: mivel a teljes pénzösszeg 55+30+35=120 forint, a végén mindenkinek 40 forintja lesz. (***1** pont*)
Ekkor az utolsó forduló előtt valakinek, 20, valakinek 40 és valakinek 60 forintja volt. (***1** pont*)
Ezt az állapotot az eredetiből nem lehet elérni, mert egy forduló után legalább egy embernek nem változik a pénze, de a $\{30, 35, 55\}$ és a $\{20, 40, 60\}$ halmazoknak nincs közös eleme. (***2** pont*)

Három forduló alatt el is érhető, hogy mindenkinek ugyanannyi legyen a pénze: először András megduplázza Csaba pénzét (az állás: 20, 30, 70), majd Csaba duplázza meg Béla pénzét (20, 60, 40), végül Béla megduplázza András pénzét, így adódik a 40, 40, 40 eredmény. (***3*** *pont*)

Összesen: 7 pont

4. Egy kocka csúcsait kiszíneztük egy-egy színnel az alábbiak közül: piros, sárga, zöld, kék, fekete, lila. Tudjuk, hogy ha két csúcs azonos színű lett, akkor azokat összeköti a kocka valamelyik éle. Egy hangya elindult a kocka egyik csúcsából, majd mindig az élek mentén haladva sétált a szomszédos csúcsok között. Az út során ilyen színű csúcsokon ment sorban: kék, lila, piros, zöld, fekete, kék, sárga, lila, piros, sárga, fekete, kék, kék. A kiinduló kék csúcsot **K**-val, a másodiknak érintett lila csúcsot **L**-lel, az utána meglátogatott piros csúcsot **P**-vel jelöltük az ábrán. Hogyan színezhettük ki a többi (számozott) csúcsot?



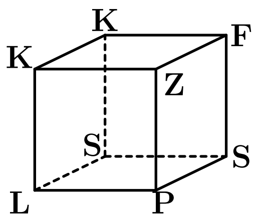
Megoldás

Legalább két csúcsot kell kékre színeznünk. Sárga csúcsból is legalább kettőnek kell lennie, mert sárga csúcsnak van kék, lila, piros és fekete szomszédja is, ami egy csúccsal lehetetlen. Tehát 2-2 kék és sárga, valamint 1-1 piros, lila, fekete és zöld csúcs van. (***1*** *pont*)

A piros csúcsnak a lilán kívül van zöld és sárga szomszédja, tehát az 3-as és 5-ös csúcs zöld és sárga valamilyen sorrendben. A kék csúcsnak van kék szomszédja, amely így csak az 1-es lehet. Ennek viszont van fekete szomszédja, amely nem lehet a 4-es, mert a feketének kell zöld, kék és sárga szomszéd is, lila már nem lehet. Tehát a fekete csúcs a 2-es. (***1*** *pont*)

A két sárga csúcs szomszédos, így ezek a 4-es és 5-ös csúcsok, tehát a zöld csúcs a 3-as. (***1*** *pont*)

Az alábbi színezés esetén ellenőrizhető, hogy a hangya végig tud sétálni a megadott útvonalon. Ez tehát az egyetlen megfelelő színezés. (***4*** *pont*)



Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megjegyzés. Ha a versenyző megadja a helyes színezést, de nem mutatja meg, hogy csak így lehet jó, akkor csak az utolsó **4 pont** jár.

5. Pisti és Sárika a következő játékot játsszák: egy 3×3-as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sárika célja az, hogy az összes szám beírása után

- a négy sarokmezőben lévő számok összege,
- a négy oldalmezőben lévő számok összege,
- az egyik átlóban lévő számok összege, és
- a másik átlóban lévő számok összege

mind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sárika nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sárika döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sárika olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit?

Megoldás
Sárika válassza a kezdést, és írja be a középső mezőbe a 9-est. (***2** pont*)
Ezután bármelyik mezőbe is ír be számot Pisti, Sárika a következő lépésben írja be az ezzel átellenes mezőbe azt a számot, amely a Pisti által beírtat összegben 9-re egészíti ki. (***2** pont*)
Ezt mindig meg tudja tenni, hiszen az $(1;8)$, $(2;7)$, $(3;6)$, $(4;5)$ párok mindegyikében a számok összege 9, így ha Pisti beírja a pár egyik tagját, Sárika beírja az átellenes mezőbe a másikat, így a következő lépésben Pistinek egy új pár egyik tagját kell választania. (***1** pont*)
Így a kitöltés befejezésével a négy sarokmezőben a számok összege 18, hiszen ez két átellenes pár. Ugyanez igaz a négy oldalmezőre is. (***1** pont*)
A két átló mindegyike a középső 9-esből és egy átellenes párból áll, így ezekben is 18 lesz az összeg. Tehát a feltételek teljesülnek (mind a négy összeg 18), így Sárika ezzel a stratégiával biztosan megnyeri a játékot. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Nem kell megadni Sárika összes lehetséges nyerő stratégiáját, elég egy konkrét játékmódról megmutatni, hogy az valóban nyerő. Ugyanakkor nagyon természetes úgy gondolkozni, hogy feltesszük, hogy Sárika célja teljesül, és megnézzük, hogy ebből mi következik a tábla mezőibe írt számokra nézve.

Ha Sárika célja teljesül, akkor a négy sarokmezőbe írt szám összege megegyezik az átlók összegével, ezért két átellenes sarokba írt szám összege pont a középre írt szám. Így a négy sarokmező összege ekkor a középső szám kétszerese, de ugyanennyi a négy oldalmezőbe írt szám összege is. Ezért az összes szám összege (45) egyenlő a középső szám ötszörösével. Tehát ha Sárika célja teljesül, akkor a középső mezőben 9-nek kell lennie. Ez a gondolatmenet önmagában **3 pont**ot ér, hiszen annyi derül ki belőle, hogy *ha van Sárikának nyerő stratégiája*, akkor az olyan, hogy elsőnek a 9-est írja középre (és az átellenes sarokmezőkben 9-re állítja az összeget). A további pontokért meg kell mutatni, hogy ilyen stratégia valóban létezik.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.