42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ

HETEDIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Valamennyi feladat hibátlan megoldása 7 pontot ér, így az elérhető maximális pontszám 35. A továbbküldés feltétele: minimum 20 pont elérése és legyen a versenyzőnek legalább egy teljes értékű megoldása, tehát 7 pontos.

1. Valaki 2012-ben annyi éves volt, mint születési éve számjegyeinek összege. Mikor születhetett?

Megoldás:

Két esetet kell megkülönböztetni. **1 pont**

Ha a XXI. században született, akkor: $\overline{20xy}+2+0+x+y=2012$, azaz $2000+10x+y+2+x+y=2012$. Szokásos rendezés után $11x+2y=10$, x csak 0 lehet, így $y=5$. Ebben az esetben 2005-ben született. **3 pont**

Ha a XX. században született, akkor $\overline{19xy}+1+9+x+y=2012$. Rendezve $1910+11x+2y=2012$, ahonnan $11x+2y=102$. **3 pont**

Ennek csak az $x=8$, $y=7$ megoldás felel meg, tehát 1987-ben született.

Az ellenőrzés megmutatja, hogy mindkét szám megfelel a feladat feltételeinek.

2. Írd le az 1000-et
a, 5 darab 9-es számjeggyel,
b, 6 darab 1-es számjeggyel,
c, 6 darab 5-ös számjeggyel,
d, 5 darab 3-as számjeggyel.

A leíráshoz mindenféle műveleti jelet és zárójeleket is használhatsz!

Megoldás:

a, 5 darab 9-es számjeggyel $1000=999+\frac{9}{9}$ **1 pont**

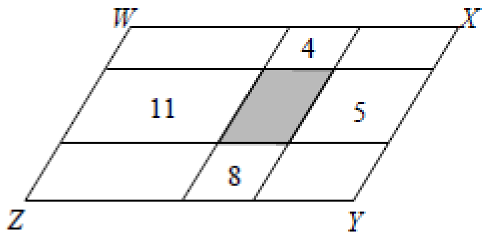
b, 6 darab 1-es számjeggyel $1000=10^3=(11-1)^{1+1+1}$ **2 pont**

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

c, 6 darab 5-ös számjeggyel $(55-5)\cdot(5\cdot 5-5)=50\cdot 20=1000$ **2 pont**

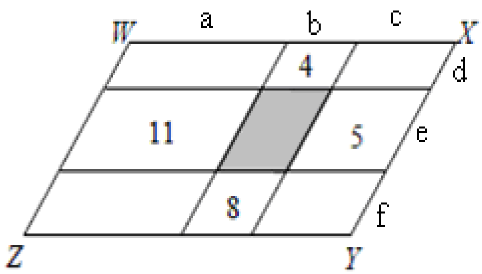
d, 5 darab 3-as számjeggyel. $\left(\frac{33-3}{3}\right)^3=1000$ **2 pont**

3. A WXYZ paralelogrammában az oldalakkal párhuzamosan vettünk fel két-két szakaszt. Ezek a nagy paralelogrammát 9 kisebb paralelogrammára bontották. Közülük négy kerületét centiméterben mérve beírtuk. Tudjuk még, hogy a WXYZ paralelogramma kerülete 21 centiméter. Mekkora a satírozott paralelogramma kerülete?



Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit!



A satírozott paralelogramma kerülete $2\cdot(b+e)$, ezt kell meghatároznunk.

Írjuk fel a négy adott kerületű paralelogramma kerületét:

$2\cdot(a+e)+2\cdot(b+d)+2\cdot(c+e)+2\cdot(b+f)=11+8+4+5=28$ értéket kapjuk. **3 pont**

Ezt átrendezzük: $2\cdot(a+b+c+d+e+f)+2\cdot(b+e)$. Itt az első tag értéke a paralelogramma kerülete, ami 21 centiméter. **3 pont**

Tehát a satírozott rész kerülete 7 centiméter, mert a 21-hez ennyit kell adni, hogy 28-at kapjunk. **1 pont**

4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek felhasználásával készíts páronként különböző prímszámokat úgy, hogy minden számjegy pontosan kétszer szerepeljen az előállított prímekben és a kapott prímszámok összege a lehető legkisebb legyen! Keress több megfelelő előállítást!

I. Megoldás:

477 lesz az eredmény.

Először egy "elméleti" modellt állítunk fel, s kiszámoljuk, hogy mennyi lenne a kérdéses összeg minimuma.

Arra kell törekedni, hogy legfeljebb kétjegyű számokat képezzünk. Azt is észrevehetjük, hogy a 4-es, 6-os, 8-as feltétlenül a tízesek helyén van. Így értékük (4+6+8)x20 = 360. Ezeket prímszámmá a következő módokon lehet kiegészíteni: 41 vagy 47, 61 vagy 67, 83 vagy 89. A két 2-es illetve két 5-ös közül az egyiknek egyjegyűként kell szerepelnie, a másiknak a tízesek helyén. Ezek értéke 2 + 5 + 20 + 50 = **77** lesz. Ha a tízesek helyére tesszük a 2-est, akkor az egyesek helyére 3-ast vagy 9-est tehetünk. Tehát 23 vagy 29. Ha a tízesek helyére tesszük az 5-öst, akkor az egyesek helyére 3-ast vagy 9-est tehetünk, tehát 53 vagy 59 lehet. A két 3-asnál és két 7-esnél mindegy, hogy az egyesek helyi értékén áll egy kétjegyű számban vagy magányosan áll, összértéke mindenképpen **20** lesz.

Az 1 és 9 esetén arra kell törekednünk, hogy a kétjegyű számban az egyesek helyi értékén álljanak. Így a mi összegünket (1 + 9) x 2 = **20**-zal növelik.

A kapott részeredményeket összeadjuk: 77 + 360 + 20 + 20 = 477. Ennél kisebb összeg nem lehet. Ezen értéket meg is lehet valósítani.

Látható a fenti okoskodásból, hogy a 2, 5, 41, 47, 61, 67, 83, 89 számoknak mindenképpen benne kell lenni az előállításban. Szabadságunk csak a 23, 29, 53, 59 tízesei, egyesei elrendezésében van. A konkrét előállítás: 2 + 5 + 23 + 41 + 47 + 59 + 61 +67 + 83 + 89 = 477 vagy

2 + 5 + 29 + 41 + 47 + 53 + 61 + 67 + 83 + 89 = 477. Tehát két megoldás van.

Megoldásonként 2-2 pontot adjunk akkor is, ha erősen hiányos az indoklás. Hiányos indoklás 1 pont, vázlatos indoklás 2 pont, lényegében teljes értékű indoklás 3 pont.

II. Megoldás:

Mivel 4, 6, 8 nem lehet prímszámban egyesek helyén, és a 2 és az 5 is legfeljebb egy alkalommal, a 18 felhasználható számjegyből az alábbi 8 biztosan legalább tízest képvisel: 2, 4, 4, 5, 6, 6, 8, 8. Így ezek az összegben legalább (2+4+4+5+6+6+8+8) · 10 = 430-at képviselnek. A fennmaradó 10 számjegy még legalább 1+1+2+3+3+5+7+7+9+9 = 47-tel növeli az összeget, amelynek lehetséges legkisebb értéke 430 + 47 = 477.

Ez az érték akkor és csak akkor érhető el, ha az első csoportba sorolt 8 számjegy mindegyike tízes helyi értékre, a másik 10 mindegyike egyes helyi értékre kerül. Mivel a 2 és az 5 nem lehet többjegyű prím végén, ők biztosan egyjegyű számot alkotnak. 60-tól 69-ig csak a 61 és 67 prím, így ezeket be kell venni. Hasonlóan 80-tól 89-ig csak a 83 és 89 jó. Maradt a 2, 4, 4, 5 a tízesek közül és 1, 3, 7, 9 az egyeseknél.

A 2-es és az 5-ös után egyaránt csak 3-as vagy 9-es jöhet, így a 4-esek után csak 1 és 7 jöhet (41, 47 prím). Így két megoldást kapunk aszerint, hogy 23 + 59-et vagy 29 + 53-at választunk. Vagyis a keresett minimum 477, amely pontosan kétféleképpen érhető el: 2+5+23+41+47+59+61+67+83+89, illetve 2+5+29+41+47+53+61+67+83+89.

5. Kezdetben egy darab számunk van, maga az 1. Meglevő számainkat gyarapíthatjuk a következő művelet segítségével: egy meglevő számot növelhetünk a szám valahány pozitív egész százalékával, ha így ismét egész számot kapunk. A százalékláb a gyarapítás során 1-től 100-ig bármelyik egész szám lehet, beleértve a határokat is, de ennél több nem. Mutasd meg, hogy 1-től 50-ig minden egész számot elő lehet állítani! (Egy példa: ha már előállítottad a 8-at valamilyen módszerrel, akkor ebből meg tudod csinálni a 12-őt, ha hozzáadod a 8-hoz annak 50 %-át a 4-et, mert 8 + 4 = 12)

Megoldás:

Az 1-ből meg tudjuk csinálni a 2-öt, ha az 1-hez hozzáadjuk az 1 100 %-át.

A 3-at így állítjuk elő: a 2-höz hozzáadjuk a 2-nek az 50 %-át.

A 4 előállítása: a 2-höz hozzáadjuk a 2-nek a 100 %-át.

Az 5 előállítása: a 4-hez hozzáadjuk a 4-nek a 25 %-át.

A számok előállítása 2-től 5-ig 1 pont.

A 6 előállítása: a 5-höz hozzáadjuk a 20 %-át (5+1=6).

A 7 előállítása: az 5-höz hozzáadjuk a 40 %-át (5+2=7).

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

A 8 előállítása: az 5-höz hozzáadjuk a 60 %-át (5+3=8).

A 9 előállítása: a 6-hoz hozzáadjuk az 50 %-át (6+3=9).

A 10 előállítása: a 8-hoz hozzáadjuk a 25 %-át (8+2=10).

A számok előállítása 6-tól 10-ig 2 pont.

Innentől lényegesen könnyebb lesz az előállítás.

Vegyük észre, hogy a 10-nek a 10 %-a 1, tehát 10 %-onként lépkedve 11-től 20-ig mindent elő tudunk állítani. **A számok előállítása 11-től 20-ig 1 pont.**

A következő észrevétel: a 20-nak az 5 %-a 1, tehát 5 %-onként lépkedve 21-től 40-ig mindent elő tudunk állítani. **A számok előállítása 21-től 40-ig 1 pont.**

Innentől a 25 4 %-át és ennek többszöröseit használjuk. A 25-nek a 4 %-a 1, tehát itt is egyesével tudunk 50-ig növelni. **A számok előállítása 40-től 50-ig 2 pont.**

Belátható, hogy a fenti módszerrel tovább is lehet növelgetni a számokat.