TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Pisti és Sárika a következő játékot játsszák: egy 3×3-as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sárika célja az, hogy az összes szám beírása után

   - a négy sarokmezőben lévő számok összege,
   - a négy oldalmezőben lévő szám összege,
   - az egyik átlóban lévő számok összege, és
   - a másik átlóban lévő számok összege

   mind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sárika nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sárika döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sárika olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit?

Megoldás
Sárika válassza a kezdést, és írja be a középső mezőbe a 9-est. (***2 pont***)
Ezután bármelyik mezőbe is ír be számot Pisti, Sárika a következő lépésben írja be az ezzel átellenes mezőbe azt a számot, amely a Pisti által beírtat összegben 9-re egészíti ki. (***2 pont***)
Ezt mindig meg tudja tenni, hiszen az $(1;8)$, $(2;7)$, $(3;6)$, $(4;5)$ párok mindegyikében a számok összege 9, így ha Pisti beírja a pár egyik tagját, Sárika beírja az átellenes mezőbe a másikat, így a következő lépésben Pistinek egy új pár egyik tagját kell választania. (***1 pont***)
Így a kitöltés befejezésével a négy sarokmezőben a számok összege 18, hiszen ez két átellenes pár. Ugyanez igaz a négy oldalmezőre is. (***1 pont***)
A két átló mindegyike a középső 9-esből és egy átellenes párból áll, így ezekben is 18 lesz az összeg. Tehát a feltételek teljesülnek (mind a négy összeg 18), így Sárika ezzel a stratégiával biztosan megnyeri a játékot. (***1 pont***)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Nem kell megadni Sárika összes lehetséges nyerő stratégiáját, elég egy konkrét játékmódról megmutatni, hogy az valóban nyerő. Ugyanakkor nagyon természetes úgy gondolkozni, hogy feltesszük, hogy Sárika célja teljesül, és megnézzük, hogy ebből mi következik a tábla mezőibe írt számokra nézve.

Ha Sárika célja teljesül, akkor a négy sarokmezőbe írt szám összege megegyezik az átlók összegével, ezért két átellenes sarokba írt szám összege pont a középre írt szám. Így a négy sarokmező összege ekkor a középső szám kétszerese, de ugyanennyi a négy oldalmezőbe írt szám összege is. Ezért az összes szám összege (45) egyenlő a középső szám ötszörösével. Tehát ha Sárika célja teljesül, akkor a középső mezőben 9-nek kell lennie. Ez a gondolatmenet önmagában **3 pont**ot ér, hiszen annyi derül ki belőle, hogy *ha van Sárikának nyerő stratégiája*, akkor az olyan, hogy elsőnek a 9-est írja középre (és az átellenes sarokmezőkben 9-re állítja az összeget). A további pontokért meg kell mutatni, hogy ilyen stratégia valóban létezik.

2. András, Béla és Csaba futóversenyeket rendeznek. Minden verseny után, az utolsó helyezett megduplázza az első helyezett pénzét. Kezdetben Andrásnak 55, Bélának 30, Csabának pedig 35 forintja volt. Hány versenyt rendeztek legalább, ha a végén mindenkinek ugyanannyi pénze lett? (A versenyek ideje alatt senki se kapott máshonnan pénzt, illetve senki se költött közben a pénzéből.)

Megoldás
Legalább három fordulóra van szükség: mivel a teljes pénzösszeg $55+30+35=120$ forint, a végén mindenkinek 40 forintja lesz. (***1** pont*)
Ekkor az utolsó forduló előtt valakinek, 20, valakinek 40 és valakinek 60 forintja volt. (***1** pont*)
Ezt az állapotot az eredetiből nem lehet elérni, mert egy forduló után legalább egy embernek nem változik a pénze, de a $\{30, 35, 55\}$ és a $\{20, 40, 60\}$ halmazoknak nincs közös eleme. (***2** pont*)
Három forduló alatt el is érhető, hogy mindenkinek ugyanannyi legyen a pénze: először András megduplázza Csaba pénzét (az állás: 20, 30, 70), majd Csaba duplázza meg Béla pénzét (20, 60, 40), végül Béla megduplázza András pénzét, így adódik a 40, 40, 40 eredmény. (***3** pont*)
Összesen: 7 pont

3. Vegyük azokat a pozitív egész számokat, amelyekben a számjegyek összege 2018, továbbá az összes számjegyére igaz az, hogy oszható a szám nála kisebb számjegyeivel. Vegyük most az ilyen számok közül azokat, amelyek a lehető legtöbb különböző számjegyből állnak. Hány jegyű az utóbbi típusú számok közül a legkisebb?

Megoldás
Ha szám számjegyeit növekvő sorrendbe rajuk, egy osztóláncot kapunk: mindegyik szám osztja a sorban utána következő számot. (***1** pont*)
1 és 9 között a tovább nem bővíthető osztóláncok a következők: 1, 2, 4, 8; 1, 2, 6; 1, 3, 6; 1, 3, 9. Látható tehát, hogy a szám legfeljebb négy különböző jegyből állhat, és ha négy különböző jegyből áll, akkor a jegyei 1, 2, 4, 8. (***2** pont*)
Ha minél kisebb számot szeretnénk, minél kevesebb jegyre van szükség. Mivel 2018-ban a 8 megvan 252-szer, így legfeljebb 252 8-as lehet a számban, ez azonban nem érhető el, mert a maradék 2, és még kéne lennie 4-es jegynek a számban. (***1** pont*)
Ezért legfeljebb 251 8-ast tehetünk a számba, és a maradék jegyek összege 10. Az előzőhöz hasonlóan, legfeljebb két 4-es jegy lehet a számban, de a kettő nem érhető el, mert kell még 1-es és 2-es jegy is. (***1** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Így legfeljebb egy 4-es jegy lehet a számban. A maradék jegyek összege 6, és ez a lehető legkevesebb jegyből így jön össze: 2, 2, 1, 1. (***1** pont*)
Tehát a legkisebb ilyen szám jegyeinek száma 256. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Egy vízilabda-mérkőzést izgalmasnak mondunk, ha a meccs során egyik csapat sem vezetett egy gólnál nagyobb különbséggel. Egy alkalommal a Magyarország–Szerbia mérkőzésen összesen 11 gól esett. Hányféle sorrendben eshettek a gólok, ha a meccs izgalmas volt? (Két sorrend különböző, ha van olyan sorszámú gól, amit nem ugyanaz a csapat szerzett az egyik sorrendben, mint a másikban.)

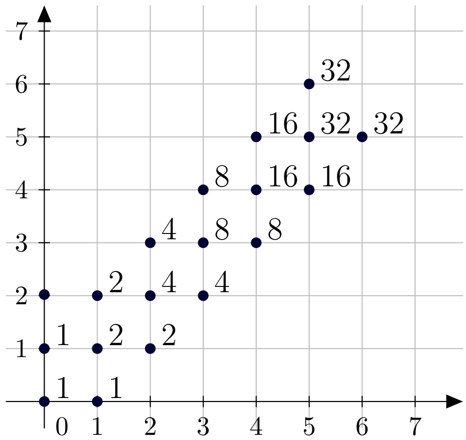
1. megoldás

Az első két gól után az állás 2-0 vagy 1-1 lehetne, de csak az utóbbi eset állhat fenn. (***2** pont*)
A következő két gól után az állás 3-1 vagy 2-2 lehetne, de megint csak az utóbbi eset állhat fenn. (***2** pont*)
Így tehát a gólokat kettesével csoportosítva elmondható, hogy egy kettes csoportban mindkét csapatnak pontosan egy gólt kell dobnia, hogy a mérkőzés izgalmas lehessen, (***1** pont*)
és az ilyen sorrendek mind jók is. (***1** pont*)
Bármely kettes csoportban kétféle sorrendben eshetnek a gólok. Az utolsó, 11. gólt bármelyik csapat dobhatja, így feladat kérdésére a válasz $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

A koordináta-rendszerben jelöljük be azokat a pontokat, melyek koordinátái a mérkőzés folyamán előfordulhattak mint részeredmények (ilyenek pl. a $(0;0), (1;0), (0;1)$ stb. pontok). Minden ponthoz írjuk oda, hogy hányféleképpen következhetett be a neki megfelelő részeredmény. A kitöltési szabály értelemszerű, egy ponthoz írt érték megegyezik a tőle balra és lefelé lévő szomszédjához írt értékek összegével (ha csak egy szomszédja van, akkor azt az értéket írjuk hozzá is). Mivel a lehetséges végeredmények, a 6-5 és az 5-6, egyaránt 32-féleképpen következhet be, a végeredmény: 64.



Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög (az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik) AC átlójának felezőpontja G, CE átlójának felezőpontja H, AD átlójának felezőpontja I. Hányadrésze az $ABCHIG$ hatszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének? (A szabályos hatszög minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.)

1. megoldás

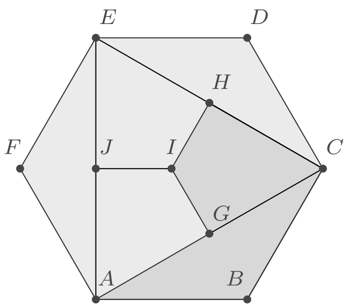
Az AC szakasz két részre bontja az $ABCHIG$ hatszöget: az ABC háromszögre és a $CHIG$ négyszögre. (***2*** *pont*)

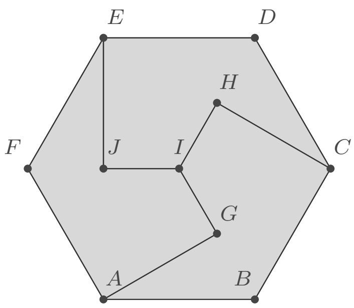
A hatszög szimmetriája miatt az ABC háromszöggel egybevágó a CDE és az EFA háromszög is, (***2*** *pont*)

és ha az AE szakasz felezőpontját J jelöli, a $CHIG$ négyszög egybevágó az $AGIJ$ és az $EJIH$ négyszöggel. (***2*** *pont*)

Ezek alapján a kérdezett arány 1/3. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont





2. megoldás

Vegyük észre, hogy ha a kérdéses hatszöget elforgatjuk az I pont körül 120°-kal és 240°-kal, akkor ezek és az eredeti hatszög hézagmentesen és átfedés nélkül lefedi az $ABCDEF$ hatszöget. (***3*** *pont*)

Indoklás: legyen J az AE átló felezőpontja. Ekkor a 120°-os forgatásnál A képe C , B képe D, C képe E, G képe H, mert AC képe CE, és I képe I, tehát $ABCHIG$ képe $CDEJIH$. (***2*** *pont*)

Hasonlóan látható, hogy $ABCHIG$ hatszög 240°-os elforgatottja $EFAGIJ$, (***1*** *pont*)

tehát a kérdezett arány 1/3. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő