TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

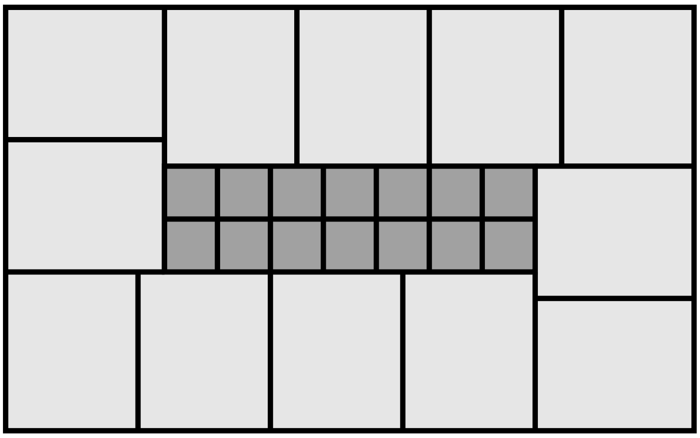
50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2021. április 23.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. 12 egyforma téglalapból és 14 egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Milyen hosszú a kis négyzetek oldala, ha a nagy téglalap kerülete 840 cm?

Megoldás. Legyen a 12 egyforma téglalap rövidebb oldala r, hosszabb oldala h, a négyzetek oldalhossza n.

A nagy téglalap rövidebb oldala: $2r + h = 2h + 2n$. Innen $2r - 2n = h$.

A nagy téglalap hosszabb oldala: $4r + h = 2h + 7n$. Innen $4r - 7n = h$.

A fentiek alapján $2r - 2n = 4r - 7n$, azaz $5n = 2r$, és így $h = 5n - 2n = 3n$.

A nagy téglalap kerülete:

$$2 \cdot (2r + h) + 2 \cdot (4r + h) = 2 \cdot 8n + 2 \cdot 13n = 42n = 840.$$

Innen a négyzetek oldala $n = 20$.

2. Miki, Niki és Viki közt 10 egyforma szelet csokit osztunk ki. A kiosztás után mindenki mondott három állítást, melyből kettő igaz, egy pedig hamis volt.

   - Miki: „Niki és Viki is több csokit kapott, mint én. Niki 3 csokit kapott. Szeretem a csokit."
   - Niki: „Nem kapott senki se kevesebb csokit, mint én. Nem kapott senki se több csokit, mint én. Mindenki kapott legalább 1 szelet csokit."
   - Viki: „Én kettővel kevesebb csokit kaptam, mint Niki. Mindenki különböző számú csokit kapott. Miki 3 csokit kapott."

   Ki hány szelet csokit kapott?

   Első megoldás. Nézzük Vikinek az első és harmadik állítását. Ha mindkettő igaz, akkor Niki és Viki összesen 7 csokit kapott, de ekkor Viki nem kaphatott kettővel kevesebb csokit, mint Niki. Így Viki második állításának igaznak kell lennie.

   Niki első és második állítása közül legalább az egyik igaz. Mivel mindenki különböző számú csokit kapott, ezért Niki vagy a legtöbb, vagy a legkevesebb csokit kapta.

   Mikinek az az állítása, hogy Niki 3 csokit kapott, nem lehet igaz, mivel ha ő kapta volna a legtöbbet, akkor max $3 + 2 + 1 = 6$ csokit, ha a legkevesebbet, akkor legalább $3 + 4 + 5 = 12$ csokit kaptak volna.

   Így Mikinek az első állítása igaz, vagyis Miki kapta a legkevesebb csokit. Így pedig Niki kapja a legtöbb csokit, emiatt neki legalább 5 csokit kell kapnia. (Ha csak 4-et kapna, akkor legfeljebb $4+3+2=9$ csokit kaphatnának összesen.)

   Miki nem kaphatott 3 csokit, mivel akkor legalább $3 + 4 + 5 = 12$ csokit kaptak volna összesen. Így Vikinek az első két állítása igaz.

   Ha Niki legalább 6 csokit kapna, akkor Viki legalább 4-et, és ekkor Mikinek nem jutna csoki. Ez pedig nem lehet, mivel akkor Nikinek két állítása lenne hamis.

   Vagyis Niki 5, Viki 3, Miki pedig 2 csokit kapott, és ezek megfelelnek a feladat feltételeinek.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Második megoldás. Ha Niki első két állítása lenne igaz, akkor mindenki ugyanannyi csokit kapott volna, mint Niki, de ez nem lehetséges, mert 10 nem osztható 3-mal. Emiatt Niki hamis állítása az első kettő közül kerül ki. Viszont a másik az első két állítása közül igaz, tehát vagy senki nem kapott nála többet, vagy senki nem kapott nála kevesebbet.

Miki második állítása, hogy Niki 3 csokit kapott nem lehet igaz, mert ez ellentmondása vezet Niki első és második állításával is:

- Ha Niki 3 csokit kapott és bárki más is legfeljebb ennyit, akkor összesen legfeljebb $3+3+3 = 9$ csoki került volna kiosztásra.
- Ha Niki 3 csokit kapott és mindenki más is legalább ennyit, akkor mégvalaki 3-at kapott, hiszen $3 + 4 + 4 > 10$. Így nem lehet igaz Viki második állítása, hogy mindenki különböző számú csokit kapott. Ezért Viki első és harmadik állítása kell hogy igaz legyen, Miki három csokit kapott és Viki kettővel kevesebbet, mint Niki. De ez ellentmond annak, hogy Nikinél senki nem kapott kevesebbet.

Tehát Miki második állítása hamis, az első és a harmadik igaz. Ebből az is következik (Miki első állítása alapján), hogy Miki kapta a legkevesebb csokit. Azt is tudjuk már, hogy mindenki legalább egy csokit kapott, mert Niki hamis állítása az első kettő közül kerül ki.

Most rátérünk annak vizsgálatára, hogy melyik lehet Viki hamis állítása. Ha a középső lenne a hamis állítás, akkor az első és a harmadik igaz. Ebből az következne, hogy Miki 3 csokit kapott, Niki ennél többet, vagyis senki nem kapott Nikinél többet, és Viki Nikinél kettővel kevesebbet. De ez nem lehetséges, mert ha Niki és Viki azonos paritású számú csokit kapott, akkor nekik összesen páros számú csoki jutott, amit Miki három csokija nem tud 10-re kiegészíteni. Tehát nem lehet Viki első és harmadik állítása egyszerre igaz, amiből az is következok, hogy a középső igaz, mindenki különböző számú csokit kapott.

Ha mindenki különböző számú csokit kapott, akkor mivel Miki kapta a minimális számú csokit, így Nikinek csak a második állítása lehet igaz az első kettőből, miszerint nála többet senki nem kapott.

Az utolsó nyitott kérdés, hogy Vikinek az első vagy a harmadik állítása hamis.

Ha az első hamis, akkor a harmadik igaz, ezért Miki 3 csokit kapott volna. de mivel mindenki különböző számú csokit kapott, ezért ekkor legalább $3+4+5 > 10$ lennnek a csokik száma. Vagyis csak Viki harmadik állítása lehet hamis.

Miki kapta a legkevesebb csokit, vagyis legfeljebb 3-at kapott, és azt is tudjuk, hogy legalább 1 csoki jutott neki. Mivel Viki Nikinél kettővel kevesebb csokit kapott, ezért (a korábbiakhoz hasonlóan) Miki csak páros sok csokit kaphatott, vagyis 2 csokit. Innen pedig azonnal adódik, hogy Niki 5, Viki 3 csokit kapott.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Határozd meg az alábbi egyenlet összes megoldását a pozitív egész számok körében:

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=4.$$

Megoldás. Ha $a, b, c \geq 2$, akkor

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \leq \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2} \leq \frac{6}{2}<4.$$

Tehát az ismeretlenek legalább egyike csak 1 lehet.

- $a=1 \Rightarrow \dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=3$. Innen $2c+3b=3bc$, amiből az következik, hogy c osztható 3-mal.
  Ha $c=3$, akkor $b=1$. Ha $c \geq 6$, akkor nincs megoldás.
- $b=1 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{c}=2$. Itt $c<4$, mert $\frac{1}{a} \leq 1$.
  A három lehetséges c érték kipróbálása egy új megoldást ad: $a=c=2$.
- $c=1 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$. Itt ha $a>1$, akkor $b \leq 4$, különben $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}<1$.
  Végignézve b lehetséges értékeit két új megoldást kapunk: $a=2, b=4$ és $a=3, b=3$.

Tehát a következő négy (a, b, c) számhármas a megoldás: (2; 1; 2), (1; 1; 3), (2, 4, 1), (3, 3, 1).

2. megoldás. A három összeadandó legalább egyikének nagyobbnak kell lennie 1-nél.
Az első tag nem lehet ilyen. Ha $\frac{2}{b}>1$, akkor $b=1$. Ha $\frac{3}{c}>1$, akkor $c=1$ vagy $c=2$.

- $b=1$ esetén $\frac{1}{a}+\frac{3}{c}=2$, innen $\frac{1}{a} \leq 1$ miatt $\frac{3}{c} \geq 1$. $c=1$ nem jó, $c=2$ esetén $a=2$, $c=3$ esetén pedig $a=1$, más lehetőség nincs.
- $c=1$ esetén $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. $a=1$ nem jó, $a=2$ esetén $b=4$, $a=3$ esetén $b=3$.
  Ha $\frac{1}{a}$-t tovább csökkentenénk, $\frac{2}{b}$-t növelni kellene, de $b=2$ már túl nagy értéket ad.
- $c=2$ esetén $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{5}{2}$, ekkor $\frac{2}{b}$-nek 1-nél nagyobbnak kell lennie, ezt már az első esetben vizsgáltuk.

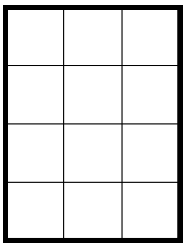
Tehát a megoldások: $(2;1;2)$, $(1;1;3)$, $(2,4,1)$, $(3,3,1)$.

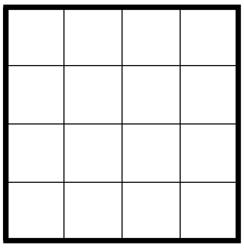
4. Egy robot lépked egy táblázat mezőin. A lépései felváltva a következők:

- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel oldalszomszédos
- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel csúcsszomszédos, de nem oldalszomszédos

A robot szeretne egy olyan sétát tenni a táblázaton, amely a táblázat összes mezőjét pontosan egyszer tartalmazza. Meg tudja-e tenni a robot, ha a táblázat

a) 3×4-es, b) 4×4-es?





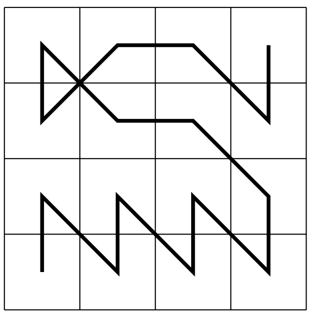
A robot tetszőleges mezőn kezdheti a sétát, és a kezdőlépés típusát is megválaszthatja. Nem szükséges a séta végén a kezdőmezőre visszaérnie.

Megoldás. a) Nem lehetséges.

Egy átlós lépés egyik végpontja mindig a középső négyes „oszlopba” esik. Mivel az átlós és nem átlós lépések váltogatják egymást, két átlós lépésnek nincs közös végpontja.

A 12 mező bejárásához 11 lépésre van szükség, ebből legalább öt átlós. De ez azt jelentené, hogy a középső oszlopba legalább ötször léptünk, ami nem lehetséges, hiszen minden mezőt pontosan egyszer kell meglátogatni.

b) Lehetséges, például:



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

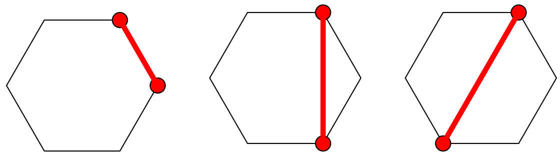
5. Pirossal megjelöltük az $ABCDEF$ szabályos hatszög csúcsait.
Hány olyan háromszög van a síkon, amelyre teljesül, hogy mind a hat piros ponton átmegy a háromszög valamelyik oldalegyenese?

Megoldás. A hat piros pont közül semelyik három nem esik egy egyenesre, ezért egy háromszög három oldalegyenese csak úgy mehet át mind a haton, ha minden oldalegyenes pontosan két piros pontra illeszkedik.

A keresett háromszög oldalegyenesei ezek szerint a hatszög csúcsait három párba sorolják.

Megfordítva: ha a hatszög csúcsait három olyan kételemű csoportba osztjuk szét, amelyekre teljesül, hogy (a) a párok által kijelölt három egyenes nem megy át egy ponton; továbbá (b) a párok által kijelölt egyenesek között semelyik kettő nem párhuzamos, akkor ez a csoportosítás egy jó háromszöget definiál.

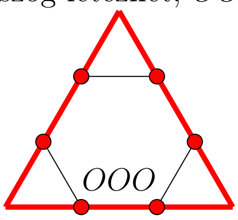
Egy párban szereplő két piros pont háromféle lehet:

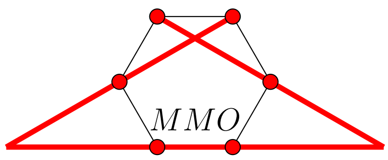


Egy jó háromszög oldalegyenese nem mehet át a hatszög középpontján, mert akkor a másik két egyenesre vagy az igaz, hogy ők is átmennek a középponton, vagy az, hogy párhuzamosak, és mindkét lehetőséget kizártuk.

Tehát egy jó háromszög egy oldalegyenese vagy a hatszög egyik oldalegyenese, vagy a hatszög másodszomszédos csúcsait összekötő átló egyenese. Jelöljük az első típusú egyenest O-val, a másodikat M-mel.

Ha egy jó háromszög két oldala O típusú, akkor a harmadiknak is O típusúnak kell lennie. Ha egy jó háromszög két oldala M típusú, akkor a harmadiknak O típusúnak kell lennie. Tehát csak kétféle jó háromszög létezhet, OOO típusú és MMO típusú.





Ezután már egyszerűen megszámolhatjuk a jó háromszögeket.

- OOO típusúból van kettő, mert három nem szomszédos hatszögoldal csak kétféle módon választható ki: $\{AB, CD, EF\}$ vagy $\{BC, DE, FA\}$.
- MMO típusúból van hat, aszerint, hogy a hatszög melyik oldala jelöli ki a háromszög O típusú oldalegyenesét.

Összesen tehát $2 + 6 = 8$ megfelelő háromszög van a síkon.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap