XXXIX. Országos Kalmár László Matematikaverseny

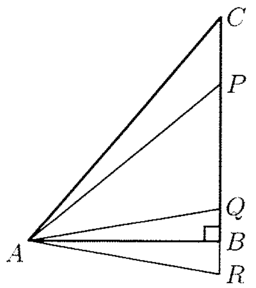
Javítási és pontozási útmutató a KMBK
Kalmár László verseny megyei fordulójához
2010.

8. osztály

1. Ha $p = 2$, akkor $2^2 + 1 = 5$, nem osztható 9-cel,
ha $p = 3$, akkor $2^3 + 1 = 9$, tehát $p = 3$ jó. **1 pont**
Ha $p > 3$ és prím, akkor $p = 6k + 1$ vagy $p = 6k + 5$ alakú. Ha $p = 6k + 1$, akkor $2^p + 1 =$
$= 2 \cdot (2^6)^k + 1 = 2 \cdot 64^k + 1$, amely 9-cel osztva 3 maradékot ad, tehát nem osztható 9-cel. **3 pont**
Ha $p = 6k + 5$, akkor $2^p + 1 = 32 \cdot 64^k + 1$, 9-cel osztva 6 maradékot ad, tehát ez sem osztható 9-cel. Az egyetlen megoldás tehát $p = 3$. **3 pont**
Összesen: **7 pont**

2. Keressük meg egy alkalmas n prímtényezős előállítását.
Mivel $5n$ teljes ötödik hatvány, n-ben az 5 prímtényező $5k + 4$ kitevővel szerepel, és $5k + 4$ osztható 6-tal és 7-tel, tehát 42-vel. A legkisebb ilyen kitevő a 84. **2 pont**
Hasonlóan a 2 és 3 (a 6 prímtényezői) $6k + 5$ alakúak n-ben, és $6k + 5$ osztható 5-tel és 7-tel. A legkisebb ilyen kitevő a 35. **2 pont**
Végül a 7 kitevője $7k+6$ alakú, és osztható 5-tel és 6-tal, tehát 30-cal. A legkisebb ilyen kitevő a 90. **2 pont**
Egyik alkalmas n tehát ilyen alakú: $n = 5^{84} \cdot 2^{35} \cdot 3^{35} \cdot 7^{90}$. **1 pont**
Összesen: **7 pont**

3.



Jelölje R a Q pont B-re vonatkozó tükörképét. **2 pont**
Ekkor $QA = QC$, mert az AQC háromszög egyenlőszárú. **1 pont**
$RA = RP = QA$, mert az RAQ és RAP háromszög is egyenlőszárú. **1 pont**
Ezért $RQ = CP = 2QB$, tehát $\frac{CP}{QB} = 2$. **3 pont**
Összesen: **7 pont**

4. A feltételek szerint a és $1 - b$ is pozitív. Az $\frac{1}{4} < a(1 - b)$ feltétel ekvivalens az $\frac{1}{2} < \sqrt{a(1 - b)}$ egyenlőtlenséggel. **2 pont**
Az utóbbiból a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján következik, hogy $\frac{1}{2} < \frac{a + 1 - b}{2}$. **3 pont**
Azaz $0 < a - b$, tehát $a > b$. **2 pont**
Összesen: **7 pont**

5. A feltevés szerint

(1) $$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 - 3k + 1 = n^2$$ **1 pont**

ahol $k > 0$, egész szám. Mivel $3k(k+1)$ páros, **1 pont**

n^2, így n is páratlan szám.

(1)-ből következik: $4 \cdot 3k^2 + 4 \cdot 3k + 4 = 3(2k+1)^2 + 1 = (2n)^2$, azaz $3(2k+1)^2 = (2n)^2 - 1 =$
$= (2n+1)(2n-1)$. **2 pont**

Mivel $2n+1$ és $2n-1$ relatív prímek és szorzatuk egy négyzetszám háromszorosa, vagy $2n+1$, vagy $2n-1$ is négyzetszám. **1 pont**

Ha $2n+1 = (2t-1)^2 = 4t^2 - 4t + 1$, akkor $n = 2t^2 - 2t$ páros, ami nem lehet. **1 pont**

Tehát $2n-1 = (2t-1)^2 = 4t^2 - 4t + 1$, amiből $n = 2t^2 - 2t + 1 = t^2 + (t-1)^2$, és ezt kellett igazolni. **1 pont**

Összesen: **7 pont**

* * *

A kijavított dolgozatokat 23 ponttól kérjük elküldeni a Teleki László Egyesület központjába.