TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület

XL. Országos Kalmár László Matematikaverseny

Műszaki Kiadó

Megyei forduló

2011

JAVÍTÁSI ÉS PONTOZÁSI ÚTMUTATÓ

8. osztály

1. Az n^4+n^2+1 szám így írható:

$n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2-n+1)(n^2+n+1)$ **3 pont**

Mivel $n > 0$, $n^2 + n + 1 > 1$, egész, így a szorzat csak akkor lehet prím, ha

$n^2 - n + 1 = 1$, azaz $n = 1$. **2 pont**

Ez jó is, hiszen 3 prím. **2 pont**

Összesen: 7 pont

2. Az A-ból induló autó sebessége x km/óra, 5 órát ment a találkozásig. A B-ből induló autó sebessége x+20 km/óra, és 3 órát ment a találkozásig. **2 pont**

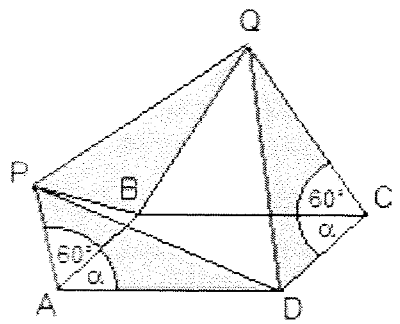
Ezért $5x + 3(x + 20) = 540$, **2 pont**

Ebből $x = 60$ km/óra. **1 pont**

Az első autó tehát 300 km-t, a második 240 km-t tett meg a találkozásig. **2 pont**

Összesen: 7 pont

3.



A PAD Δ egybevágó a DCQ Δ-gel, mert megegyeznek két megfelelő oldalukban,

(AP = DC, és AD = CQ),

valamint a közbezárt szögben. **2 pont**

A PBQ Δ is egybevágó az előző két háromszöggel, hiszen PB = PA és BQ = AD, a közbezárt szög pedig

$360° - 120° - (180° - \alpha) = 60° + \alpha$ **3 pont**

Tehát PD = DQ =QP, a PDQ Δ szabályos háromszög. **2 pont**

Összesen: 7 pont

4. Tekintsük a következő n darab számot:

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots\ ,\ \underbrace{11\ldots1}_{n\ db}$$

Ha ezek között van n-nel osztható, akkor az után akárhány 0-t is írunk, a kapott szám is osztható lesz n-nel. **3 pont**

Ha a felsorolt n szám közt nincs n-nel osztható, akkor n-nel osztva csak $n-1$-féle maradékot adnak $(1, 2, \ldots, n-1)$, tehát van kettő, amely n-nel osztva azonos maradékot ad. Ezek különbsége osztható n-nel, és ez a keresett alakú szám

4 pont

Összesen: 7 pont

5. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, bármely $n > 0$ egész számra, ha

$n^2 < k$, akkor $2k < (n+1)^2$, azaz $2n^2 < (n+1)^2$. **2 pont**

Ebből $n^2 - 2n - 1 < 0$.

Mivel $n^2 - 2n - 1\ n^2 - 2n + 1 - 2 = (n-1)^2 - (\sqrt{2})^2 =$

$= (n - 1 - \sqrt{2})(n - 1 + \sqrt{2}) < 0$ **2 pont**

Ez csak úgy lehet, ha $1-\sqrt{2} < n < 1+\sqrt{2}$, azaz $n = 1$, vagy $n = 2$. **1 pont**

Ha $n = 1$, akkor $1 < k$, de $2k < 4$, azaz $1 < k < 2$, ami ellentmondás (mert k egész). **1 pont**

Ha $n = 2$, akkor $4 < k$, de $2k < 9$, azaz $4 < k < 4{,}5$, **1 pont**

ez is ellentmondás. A feltevés tehát hamis, az állítás igaz. **1 pont**

Összesen: 7 pont

****

A kijavított dolgozatokat 23 ponttól kérjük elküldeni a Teleki László Egyesület központjába.

Budapest, 2011. április

Jó munkát kíván az
Országos Versenybizottság