**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

# 42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
# MEGYEI FORDULÓ

## NYOLCADIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Valamennyi feladat hibátlan megoldása 7 pontot ér, így az elérhető maximális pontszám 35. A továbbküldés feltétele: minimum 20 pont elérése és legyen a versenyzőnek legalább egy teljes értékű megoldása, tehát 7 pontos.

**1.** Legyen A egy 2013-ra végződő pozitív egész szám, B pedig az a pozitív egész szám, amelyet A utolsó négy jegyének törlésével kapunk. Tudjuk, hogy A egész számú többszöröse B-nek. Hány ilyen A szám van?

**Megoldás:**

A feladatban definiált A számok felírhatók $10000 \cdot B + 2013$ alakban. **1 pont**

Mivel B osztója a $10000 \cdot B$-nek, ezért kell, hogy a B osztója legyen a 2013-nak. **2 pont**

A $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, így 2013-nak nyolc pozitív osztója van. **2 pont**

A keresett számok: 12013, 32013, 112013, 612013, 332013, 1832013, 6712013, 20132013. **2 pont**

**Ha hiányos az indoklás, de minden esetet felsorol, adjunk 4 pontot. A hibás esetekért legalább 1 pontot vonjunk le.**

**2.** Négy különböző pozitív számjegy felhasználásával elkészítettük az összes olyan négyjegyű számot, amelyben a számjegyek különbözők. Ezeknek a négyjegyű számoknak 186648 az összegük. Melyek lehettek a kiinduló számjegyek?

**Megoldás:**

Legyen a négy számjegy *a*, *b*, *c* és *d*. Hat olyan négyjegyű szám van, melyben az *a* az ezres helyi értéken szerepel:

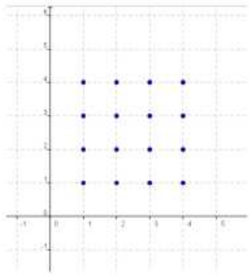
$\overline{abcd}$, $\overline{abdc}$, $\overline{acbd}$, $\overline{acdb}$, $\overline{adbc}$, $\overline{adcb}$.

Ugyanígy hatszor szerepel az *a* a százasok, tízesek és egyesek helyén is, és ezek a megállapítások mindegyik számjegyre érvényesek. **2 pont**

Így amikor összeadjuk a számokat, minden számjegyet minden helyi értéken hatszor adunk össze, tehát a számok összege $6666 \cdot (a + b + c + d)$. **2 pont**

Tehát 6666 · (a + b + c + d) = 186648, ahonnan $a+b+c+d=28$ **2 pont**

Emiatt a számjegyek összege 28. A lehetséges számjegynégyesek: {9, 8, 7, 4} vagy {9, 8, 6, 5}. **1 pont**



**3.** Hány olyan háromszög van, amelynek $(x; y)$ csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben az $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 4$ feltételnek eleget tevő egész koordinátájú pontok?

**Megoldás:**

516 darab megfelelő háromszög van.

Az "összes mínusz rossz" megoldó módszert alkalmazzuk. A 16 pontból kiválasztunk 3-at, majd a rosszakat levonjuk. **2 pont**

A 16 pontból a háromszög három csúcsa közül az elsőt 16-féleképpen, a másodikat 15-féleképpen, a harmadikat 14-féleképpen választhatjuk ki. Legyen a kiválasztott háromszög ABC. Vegyük észre, hogy ezt a háromszöget hatféleképpen lehetett kiválasztani (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB és CBA), ezért az előbb mondott értéket osztani kell 6-atl, tehát $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{6} = 560.$ **2 pont**

Az x illetve az y tengellyel párhuzamosan van 4 + 4 = 8 olyan egyenes, amelyen lévő "háromszögeket" az előbb beszámoltuk, de ezek valójában szakaszok, így le kell vonnunk $8 \cdot 4 = 32$-őt. **2 pont**

Továbbá a két átlón keletkezett "háromszögek" számát is le kell vonni. Ez összesen 8.

Az átlókkal párhuzamosan van 4 darab olyan "rövid átló", amelyen 3 pont helyezkedik el egy egyenesen. Emiatt újabb 4-et kell levonni. **1 pont**

Tehát a megoldás 560 - 32 - 8 - 4 = 516.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

**4.** Egy apa egy bizonyos összeget szétosztott a gyermekei között. A legidősebb 100 Ft-ot kapott és a maradék tized részét, a második 200 Ft-ot és az új maradék tized részét, a harmadik 300 Ft-ot és az új maradék tized részét és így tovább. A végén kiderült, hogy minden gyermek ugyanannyit kapott. Hány gyermek volt, és mennyit kapott egyik-egyik?

**Megoldás**

Legyen az örökség x forint. Ekkor a legidősebb $100+\frac{x-100}{10}$ forintot kap. A második legidősebb $200+\frac{x-100-200-\frac{x-100}{10}}{10}$-at kap.

A szöveg szerint ezek egyenlők:

$$100+\frac{x-100}{10}=200+\frac{x-100-200-\frac{x-100}{10}}{10}.$$ **2 pont**

Szorozzunk végig 10-zel és vonjunk össze, ahol tudunk:

$$1000+(x-100)=2000+x-300-\frac{x-100}{10}\ .$$

Tovább rendezve: $900=1700-\frac{x-100}{10}$.

Szorozzunk 10-zel: $\frac{x-100}{10}=800$, ahonnan $x=8100$. 4 **pont a helyes egyenletrendezésért**.

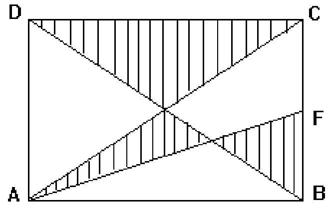
A legidősebb 900 Ft-ot kap, s ezt az összeget a többi gyereknek is ki lehet osztani, végig igaz lesz a feladat szövege. Tehát $8100:900=9$ gyerek van. (ELLENŐRZÉS). **1 pont**

**Számolási hibáért 1-2 pontot vonjunk le. Hibás egyenlet felírásáért ne adjunk pontot. Egyenlet nélküli próbálgatásos megoldásért - ha jó az eredmény - maximum 2 pontot adjunk.**

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**

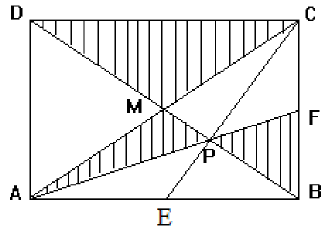
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

**5.** Az ABCD téglalap BC oldalának felezőpontja F. Hányadrésze a satírozott területek összege a téglalap területének?




**Megoldás:**

Használjuk az ábra jelöléseit! A DMC háromszög területe a téglalap területének negyede. **1 pont**




Vegyük észre, hogy az ABC háromszögben AF és BM is egy-egy súlyvonal. Ezért a háromszög súlypontja P. **1 pont**

Ismeretes, hogy a súlyvonal felezi a háromszög területét, a súlypont harmadolja a súlyvonalakat, ezért APM háromszög területe hatoda az ABC háromszög területének, hasonlóan a PFB háromszög területe hatoda az ABC háromszög területének. **2 pont**

Az APM és a PFB háromszögek területe a téglalap területének 1 tizenketted része. **2 pont**

Tehát $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$. **1 pont**