Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló - 2015. április 11.

NYOLCADIK OSZTÁLY - Javítási útmutató

1. Egy 10×10-es négyzetrács minden kis négyzete fehérre vagy feketére van színezve. Egy lépésben egy sor vagy oszlop minden kis négyzetének színét megváltoztathatjuk az ellenkezőjére. Bizonyítsd be, hogy a kiinduló állástól függetlenül elérhető ilyen lépésekkel az, hogy legalább 10-zel több négyzet legyen fekete, mint fehér!

Megoldás
Az első oszlop minden kis négyzete feketére változtatható: haladjunk rajta végig a mezőkön egyesével, és ahol fehér négyzet szerepel, annak a sorát változtassuk meg. Így tehát az első oszlop minden mezője feketévé válik. (***2** pont*)
Ezután vizsgáljuk meg a maradék kilenc oszlopot külön-külön. Ahol a fekete mezők nincsenek kisebbségben, ne változtassunk, ahol viszont kisebbségben vannak, változtassuk meg az oszlopot. (***4** pont*)
Az eredményül kapott táblázatban az első oszlop fekete, a többi oszlopban legalább annyi a fekete, mint a fehér mező, így a fekete mezők legalább tízzel többen vannak, mint a fehér mezők. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés.
Annak bizonyítása, hogy elérhető az, hogy a táblázatban legalább annyi fekete mező legyen, mint fehér: ***1** pont.*
Ha már az első oszlopot feketére változtattuk, a megoldást a következőképpen is folytathatjuk: az első oszlopot elhagyjuk, és megnézzük, hogy a maradék 9×10-es táblázatban kisebbségben vannak-e a feketék. Ha nincsenek, nem csinálunk semmit. Ha viszont kisebbségben vannak a feketék a táblázatban, akkor mind a 9 oszlopban végrehajtjuk a változtatást. Így az egész 9×10-es rész az ellenkezőjére változott, vagyis most már többségben vannak benne a fekete mezők. Innen a befejezés ugyanaz, mint az eredeti megoldásban.

2. Jenő idén februárban a városban sétálgatott, amikor egy figyelemre méltó épületen meglátott egy ismertető táblát. A táblán sok érdekesség volt olvasható az épületről, többek között az is, hogy mikor építették. Kicsit elgondolkozott, majd megállapította, hogy 2015-öt követően lesz egy olyan év, amikor az aktuális évszám éppen a négyzete annak a számnak, ahány éves az épület abban az évben. 2015-ben az épület építésének hányadik évfordulóját ünneplik?

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Megoldás

Tegyük fel, hogy n éves lesz az épület majd a jövőben, amikor az akkori év értéke éppen n^2. (*1 pont*)

Mivel jövő időről beszélünk, így $n^2 > 2015$. Innen azt kapjuk, hogy $n \geq 45$, hiszen $44^2 = 1936 < 2015$, $45^2 = 2025 > 2015$. (*2 pont*)

Másrészt a múltban épült, azaz $n^2 - n = n(n-1) < 2015$. (*1 pont*)

Mivel $45 \cdot 44 = 1980 < 2015$, $46 \cdot 45 = 2070 > 2015$, és az $n(n-1)$ szorzat értéke n növelésével nő, így $n \leq 45$. (*2 pont*)

Az eddigieket összevetve az n egyetlen lehetséges értéke 45. Ezek szerint az épület 1980-ban épült, ami azt jelenti, hogy 2015-ben építésének **35**. évfordulóját ünnepli az épület. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzések.

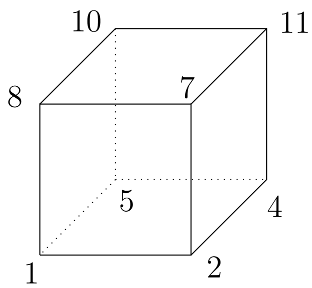
A helyes eredmény (35) közlése: ***1** pont.*

A helyes eredmény ellenőrzése: ***1** pont.*

3. Rá lehet-e írni egy kocka nyolc csúcsára a $0, 1, 2, \ldots, 12$ számok közül nyolcat úgy, hogy minden él két végpontjában a számok összege osztható legyen hárommal? (Minden számot legfeljebb egyszer használhatunk fel.)

Megoldás

Egy lehetséges megoldás:



7 pont

Megjegyzés.

Egy megoldás keresése során a következő észrevételekkel részpontszámok szerezhetők:

Ha valamelyik csúcsra 3-mal osztható számot írunk, akkor minden vele élszomszédos csúcson is 3-mal osztható számnak kell állnia: ***1** pont.*

Ha valamelyik csúcsra 3-mal osztva 1, illetve 2 maradékot adó számot írunk, akkor minden vele élszomszédos csúcsra 3-mal osztva 2, illetve 1 maradékot adó számot kell írnunk: ***1** pont.*

Mivel bármely csúcstól bármely csúcsig el lehet jutni az éleken lépdelve, ezért vagy minden csúcsra 3-mal osztható számot írunk, vagy egyikre sem írunk hárommal osztható számot: ***1** pont.*

Mivel 0-tól 12-ig 5 db 3-mal osztható szám van (0, 3, 6, 9, 12), így a feliratozás hárommal osztható számokkal nem végezhető el: ***1** pont.*

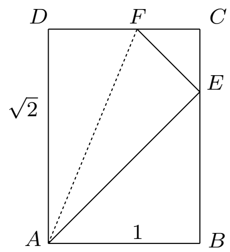
Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

4. Egy téglalap alakú papírlap két oldala 1 és $\sqrt{2}$ egység. A papírlap egyik sarkát behajtjuk (egyenes hajtáséllel) úgy, hogy a hajtásél az egyik csúcsból indul, és a csúcsot nem tartalmazó rövidebbik oldalt metszi, valamint a behajtott csúcs éppen a hosszabb oldalra esik. Milyen messze van a hajtásél (csúcstól különböző) végpontja a legközelebbi csúcstól?

Megoldás
Rajzoljunk ábrát a feladat szövege alapján. (***1** pont*)



A hajtás miatt $AD = AE = \sqrt{2}$. (***1** pont*)
Ekkor ABE egy olyan derékszögű háromszög, melynek egyik befogója 1, átfogója pedig $\sqrt{2}$. A Pitagorasz-tétel miatt így $BE = 1$. (A négyzet átlójának hosszára is hivatkozhatunk.) (***1** pont*)
Így ABE egyenlő szárú is egyben, ami azt jelenti, hogy az E-nél lévő szöge 45°-os. (***1** pont*)
Másrészt a hajtás miatt az $AEF\sphericalangle$ derékszög, s így a $FEC\sphericalangle$ szintén 45°-os, azaz az FEC háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. (***1** pont*)
$CE = BC - BE = \sqrt{2} - 1$. (***1** pont*)
A fentiekből következik, hogy $CF = CE = \sqrt{2} - 1$, vagyis a feladat kérdésére a válasz $\mathbf{\sqrt{2} - 1}$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.
Ha valaki a CF távolság helyett csak a DF szakasz hosszát $(2 - \sqrt{2})$ adja meg, akkor 1 pontot veszítsen.

5. Egy a_n sorozat tagjairól tudjuk, hogy minden pozitív egész n esetén

$$a_{2n} = a_n \text{ és } a_{2n+1} = a_n + a_1,$$

továbbá $a_{1000} = 6$. Mennyi a_{2015} értéke?

1. megoldás
Nézzük meg, mit deríthetünk ki abból, hogy $a_{1000} = 6$:

$$6 = a_{1000} = a_{500} = a_{250} = a_{125} = a_{62} + a_1 = a_{31} + a_1 = a_{15} + 2a_1 = a_7 + 3a_1 = a_3 + 4a_1 = 6a_1,$$

vagyis $a_1 = 1$. (***4** pont*)

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Ezt felhasználva:

$$a_{2015} = a_{1007} + a_1 = a_{503} + 2a_1 = a_{251} + a_1 = a_{125} + 4a_1 = a_{1000} + 4a_1 = 10a_1 = 10,$$

azaz a_{2015} értéke **10**. (***3*** *pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Vegyük észre, hogy ha b_n azt jelöli, hogy hány egyes van az n szám kettes számrendszerbeli alakjában, akkor b_n is teljesíti a feladatban szereplő feltételt: $b_{2n} = b_n$ és $b_{2n+1} = b_n + b_1$. (***2*** *pont*)

Vegyük észre azt is, hogy $b_{1000} = 6$. (***1*** *pont*)

Mivel a sorozat 1000. tagja és a képzési szabály egyértelműen meghatározza a sorozat minden tagját, ezért $a_{1000} = b_{1000}$ alapján $a_n = b_n$. (***2*** *pont*)

Így $a_{2015} = b_{2015} =$ **10** (hiszen 2015=1024+512+256+128+64+16+8+4+2+1). (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.

A fenti második megoldás akkor lenne teljesen pontos, ha bebizonyítanánk, hogy a képzési szabályt kielégítő sorozatok egy konstans szorzó erejéig egyértelműek. Ezt a versenyzőktől nem várjuk el.