TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

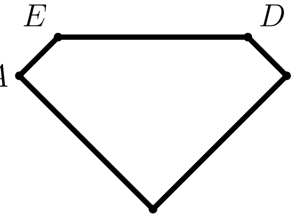
50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2021. április 23.

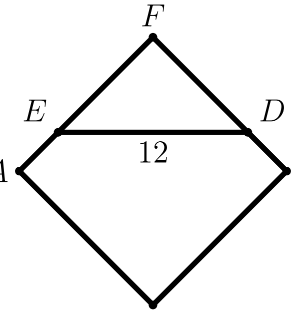
NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Az ábrán látható ötszögnek A-nál, B-nél és C-nél derékszöge van, a maradék két szöge pedig $135°$-os. Tudjuk továbbá, hogy $AB = BC = DE = 12$ egység. Határozd meg az ötszög területét. *Teljes pontszámhoz a válasz legegyszerűbb alakját kell megadnod.*



Megoldás. Az AE és CD félegyenesek metszéspontja legyen F.



Az $ABCF$ négyszög egy 12 egység oldalhosszúságú négyzet, hiszen minden szöge derékszög, továbbá $AB = BC$. Területe $12^2 = 144$ egység.

Az EDF háromszög derékszögű és egyenlőszárú, mert $AE = DC$, így $FE = 12 - AE = 12 - DC = FD$. Területe megkapható az átfogó felének négyzeteként, mert az átfogóhoz tartozó magassága egyenlő az átfogó felével. Tehát $T_{EDF} = 6^2 = 36$ egység.

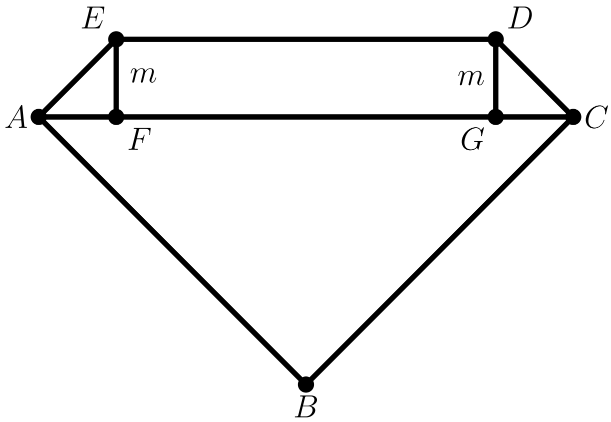
Az ötszög területét megkapjuk, ha az $ABCF$ négyzet területéből levonjuk az EDF háromszög területét:

$$T_{ABCDE} = T_{ABCF} - T_{EDF} = 144 - 36 = 108\,(\text{egység}).$$

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás Bontsuk fel az ötszöget az ABC háromszögre és az $ACDE$ négyszögre.

Az ABC háromszög derékszögű, területe a két befogó szorzatának fele: $\frac{12 \cdot 12}{2} = 72$ egység.



Rajzoljuk meg az AFE és CGD egyenlőszárú derékszögű háromszögeket. A befogóikat (egyben az $ACDE$ trapéz magasságát) jelölje m.

Ekkor az AC és DE hosszának különbsége egyrészt $2m$, másrészt $12\sqrt{2} - 12$, azaz $m = 6\sqrt{2} - 6$.

Ezután fel tudjuk írni az $ACDE$ négyszög területét is, hiszen az trapéz, és ismerjük az alapjait ($12\sqrt{2}$ és 12) és a magasságát ($m = 6\sqrt{2} - 6$). Tehát az $ACDE$ négyszög területe

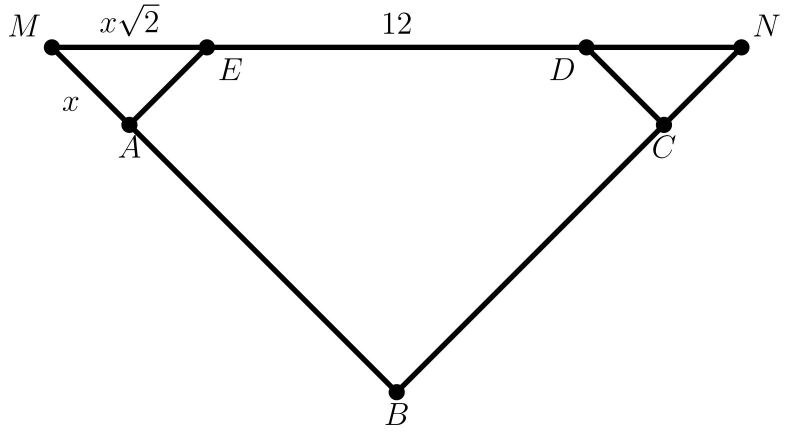
$$\frac{(12 + 12\sqrt{2}) \cdot (6\sqrt{2} - 6)}{2}$$

ami a zárójel felbontása és az összevonások után végül $(144 - 72)/2 = 36$ egység.

Tehát a négyszög területe $72 + 36 = 108$ egység.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. megoldás. Egészítsük ki az ötszöget egy egyenlőszárú derékszögű BMN háromszöggé az ED egyenes illetve a BA és BC félegyenesek meghosszabbításával, és legyen az AE, DC szakaszok hossza x.



Az AME és DCN háromszögek derékszögű és egyenlőszárú háromszögek,

$$AM = AE = CD = CN = x, \text{ továbbá } ME = DN = x\sqrt{2}.$$

E két háromszög egy x oldalhosszúságú négyzetté illeszthető össze, együttes területük x^2, ezért

$$T_{ABCDE} = \frac{(12+x)^2}{2} - x^2.$$

x megjapható az MBN derékszögű háromszög MN átfogójának kétféle felírásából:

$$(12+x)\sqrt{2} = 12 + 2 \cdot x\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12\sqrt{2} - 12}{\sqrt{2}} = 6 \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

A területre adott formulába visszahelyettesítve:

$$T = \frac{(12 + 6 \cdot (2-\sqrt{2}))^2}{2} - (6 \cdot (2-\sqrt{2}))^2 = 36 \cdot \left(\frac{(4-\sqrt{2})^2}{2} - (2-\sqrt{2})^2 \right) =$$

$$= 36 \cdot \left(9 - 4\sqrt{2} - (6 - 4\sqrt{2}) \right) = 36 \cdot 3 = 108.$$

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Határozd meg az alábbi egyenlet összes megoldását a pozitív egész számok körében:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 4.$$

Megoldás. Ha $a, b, c \geq 2$, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{6}{2} < 4.$$

Tehát az ismeretlenek legalább egyike csak 1 lehet.

- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c} = 3$. Innen $2c + 3b = 3bc$, amiből az következik, hogy c osztható 3-mal. Ha $c = 3$, akkor $b = 1$. Ha $c \geq 6$, akkor nincs megoldás.
- $b = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{3}{c} = 2$. Itt $c < 4$, mert $\frac{1}{a} \leq 1$. A három lehetséges c érték kipróbálása egy új megoldást ad: $a = c = 2$.
- $c = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1$. Itt ha $a > 1$, akkor $b \leq 4$, különben $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} < 1$. Végignézve b lehetséges értékeit két új megoldást kapunk: $a = 2, b = 4$ és $a = 3, b = 3$.

Az egyenletnek tehát négy megoldása van a pozitív egész számok halmazán:

a	b	c
1	1	3
2	1	2
2	4	1
3	3	1

2. megoldás. A három összeadandó legalább egyikének nagyobbnak kell lennie 1-nél. Az első tag nem lehet ilyen. Ha $\frac{2}{b} > 1$, akkor $b = 1$. Ha $\frac{3}{c} > 1$, akkor $c = 1$ vagy $c = 2$.

- $b = 1$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{3}{c} = 2$, innen $\frac{1}{a} \leq 1$ miatt $\frac{3}{c} \geq 1$. $c = 1$ nem jó, $c = 2$ esetén $a = 2$, $c = 3$ esetén pedig $a = 1$, más lehetőség nincs.
- $c = 1$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. $a = 1$ nem jó, $a = 2$ esetén $b = 4$, $a = 3$ esetén $b = 3$. Ha $\frac{1}{a}$-t tovább csökkentenénk, $\frac{2}{b}$-t növelni kellene, de $b = 2$ már túl nagy értéket ad.
- $c = 2$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5}{2}$, ekkor $\frac{2}{b}$-nek 1-nél nagyobbnak kell lennie, ezt már az első esetben vizsgáltuk.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

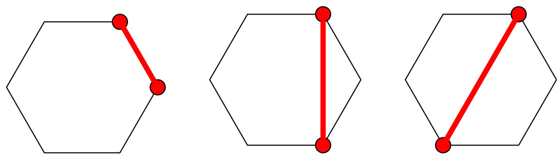
3. Pirossal megjelöltük az $ABCDEF$ szabályos hatszög csúcsait.
Hány olyan háromszög van a síkon, amelyre teljesül, hogy mind a hat piros ponton átmegy a háromszög valamelyik oldalegyenese?

Megoldás. A hat piros pont közül semelyik három nem esik egy egyenesre, ezért egy háromszög három oldalegyenese csak úgy mehet át mind a haton, ha minden oldalegyenes pontosan két piros pontra illeszkedik.

A keresett háromszög oldalegyenesei ezek szerint a hatszög csúcsait három párba sorolják.

Megfordítva: ha a hatszög csúcsait három olyan kételemű csoportba osztjuk szét, amelyekre teljesül, hogy (a) a párok által kijelölt három egyenes nem megy át egy ponton; továbbá (b) a párok által kijelölt egyenesek között semelyik kettő nem párhuzamos, akkor ez a csoportosítás egy jó háromszöget definiál.

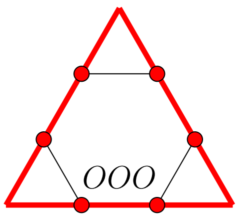
Egy párban szereplő két piros pont háromféle lehet:

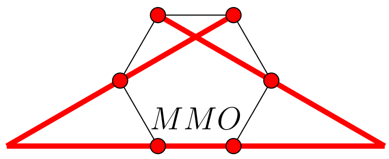


Egy jó háromszög oldalegyenese nem mehet át a hatszög középpontján, mert akkor a másik két egyenesre vagy az igaz, hogy ők is átmennek a középponton, vagy az, hogy párhuzamosak, és mindkét lehetőséget kizártuk.

Tehát egy jó háromszög egy oldalegyenese vagy a hatszög egyik oldalegyenese, vagy a hatszög másodszomszédos csúcsait összekötő átló egyenese. Jelöljük az első típusú egyenest O-val, a másodikat M-mel.

Ha egy jó háromszög két oldala O típusú, akkor a harmadiknak is O típusúnak kell lennie. Ha egy jó háromszög két oldala M típusú, akkor a harmadiknak O típusúnak kell lennie. Tehát csak kétféle jó háromszög létezhet, OOO típusú és MMO típusú.





Ezután már egyszerűen megszámolhatjuk a jó háromszögeket.

- OOO típusúból van kettő, mert három nem szomszédos hatszögoldal csak kétféle módon választható ki: $\{AB, CD, EF\}$ vagy $\{BC, DE, FA\}$.
- MMO típusúból van hat, aszerint, hogy a hatszög melyik oldala jelöli ki a háromszög O típusú oldalegyenesét.

Összesen tehát $2 + 6 = 8$ megfelelő háromszög van a síkon.

4. Egy 4×4-es táblázatot 1-es és 2-es számjegyekkel kitöltöttünk. A táblázatból balról jobbra, jobbról balra, fentről lefele és lentről felfele is kiolvashatók négyjegyű számok. Legfeljebb hány különböző lehet az így kiolvasható 16 db négyjegyű szám között?

1	2	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
1	2	2	1

Például, az ábrán látható kitöltésből 8 különböző négyjegyű szám olvasható ki: 1121, 1211, 1212, 1221, 2122, 2121, 2212, 2211.

Megoldás. 14 különböző négyjegyű szám elérhető, például az alábbi kitöltéssel:

1	1	2	2
2	2	2	2
1	1	1	2
1	2	2	1

Ebből minden kiolvasható, kivéve az 1111 és a 2112.

Elvileg lehetséges négyjegyű számból $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ van.

Olyan számból, amely előrefele és hátrafelé kiolvasva is ugyanaz, négy darab van (1111, 1221, 2112, 2222). Ha ezekből legfeljebb kettő szerepel a kiolvasott számok közül, akkor legfeljebb 14 számot lehet kiolvasni. Ha viszont legalább kettő, akkor ezek kiolvasásánál ugyanazt a számot olvassuk ki, tehát a 16 lehetséges kiolvasásból legalább kettő-kettő ugyanaz, így legfeljebb 14 lesz különböző.

5. Bizonyítsd be, hogy 99 darab egész szám közül, melyek nem adnak csupa egyforma maradékot 100-zal osztva, ki lehet választani néhányat (esetleg csak egyet), melyek összege osztható 100-zal.

Megoldás. Jelölje a 99 számot $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Feltehetjük, hogy a_1 és a_2 100-as maradéka különbözik egymástól. Tekintsük most a következő 100 darab összeget:

$$a_1,\ a_2,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}.$$

Ha ezek csupa különböző maradékot adnak 100-zal osztva, akkor van köztük 100-zal osztható, így kijött a bizonyítandó. Ha pedig nem fordul elő mind a 100-féle maradék, akkor kell köztük lennie két egyforma maradékúnak. Ez feltevésünk alapján nem lehet a_1 és a_2, viszont minden más esetben a két összeg különbsége is néhány a_i összege, és ez a különbség pedig osztható 100-zal.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap