

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

Minden állítást bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény puszta közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. 4 testvér (akik között nincsenek ikrek) beszélget születésük sorrendjéről. Kettő közülük hazudik, kettő igazat mond.

András: Dávid a legfiatalabb.

Boldizsár: Dávid a legöregebb és Boldizsár a legfiatalabb.

Csilla: Én születtem legkésőbb.

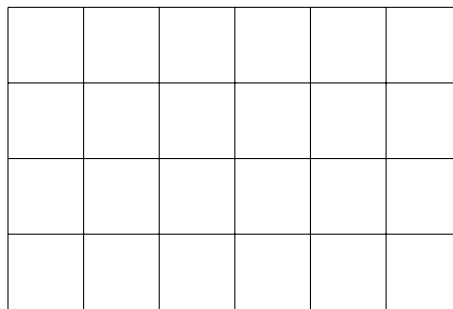
Dávid: Sem legfiatalabb, sem legöregebb nem vagyok.

Melyik két testvér állítása igaz?

2. Ossz fel egy 6×4 -es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész

- (a) hatszög
- (b) nyolcszög
- (c) tízszög

legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra!



FOLYTATÁS A TÚLOLDALON!

3. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy 5×5 -ös táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjelöl a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 12 mezőt a gondoltak közül?

4. Adottak a következő törtek:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

Minden lépésben készíthetünk egy új számot úgy, hogy a következő két művelet valamelyikének végeredményével bővítjük az eddigi számok halmazát:

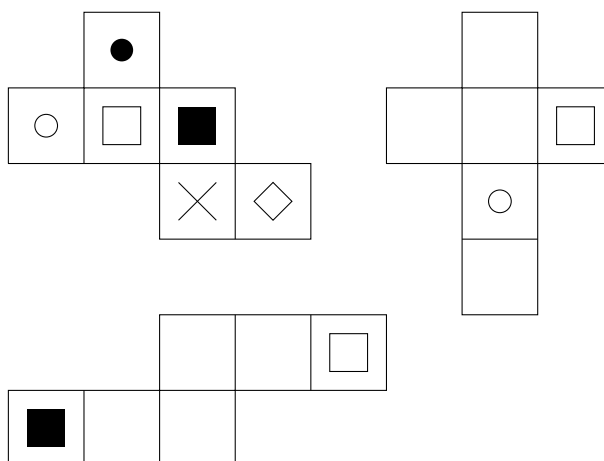
- egy meglévő számban felcseréljük a számlálót és a nevezőt;
- egy meglévő számot kivonunk 1-ből.

Hány számot kaphatunk így, ha akárhány lépést elvégezhetünk? (Az újonnan kapott számot a következő lépésben már felhasználhatjuk.)

(A törteknek minden esetben a legegyszerűbb alakját használd! Pl.: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ és $\frac{3}{1} = 3$.)

5. Egy papírból készült kocka lapjaira kívülről mintákat rajzoltunk. Ezután szétnyitottuk a kockát, kiterítettük, így az első ábrán látható hálót kaptuk. A másik két hálóból pontosan ugyanilyen kockát szeretnénk hajtogatni.

Rajzold be a hiányzó mintákat a megfelelő négyzetekbe! (A papír nem átlátszó, és a mintát csak az egyik oldalon rajzoljuk meg.) Elegendő megadni a helyes ábrát, nincs szükség indoklásra.



2017. május 19.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

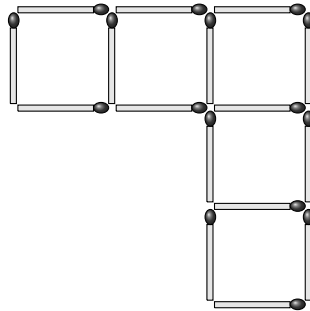
Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztán közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. Egy 14 fős baráti társaságban üveggolyókat gyűjtenek: pirosat, zöldet és sárgát. A következőket tudjuk:

- (1) Akinek nincs zöld, annak van piros vagy sárga.
- (2) Akinek nincs sárga, annak van piros.
- (3) Közülük 7-nek pontosan 2-féle üveggolyója van.
- (4) Ötüknek eddig csak 1-félét sikerült gyűjteni.

Válaszolj az alábbi kérdésekre:

- (a) Hánynak nincs eddig még üveggolyója?
 - (b) Hánynak van mindhárom fajta?
 - (c) Van-e olyan társaság, melyre az összes feltétel teljesül?
2. (a) Helyezz át az ábrán két gyufaszálát úgy, hogy a négyzetek száma 4-re csökkenjen, és minden gyufaszál valamelyik négyzet teljes oldalát alkossa.



- (b) Hány megoldás lehetséges? (Két megoldás különböző, ha az áthelyezések után valamelyikben van gyufa egy olyan helyen, ahol a másikban nincs.)

FOLYTATÁS A TÚLOLDALON!

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ DABC \\ CDAB \\ + CDA \\ \hline CCCCCB \end{array}$$

Add meg az $ABCD$ négyjegyű szám összes lehetséges értékét!

4. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy 3×3 -as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban egyenlő legyen a számok összege, és minden oszlopban is egyenlő legyen a számok összege?

- (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- (b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4
- (c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

2017. május 20.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

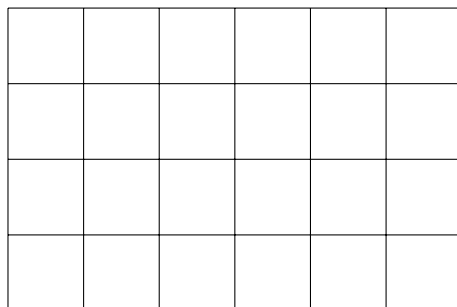
Országos döntő – 1. nap

HATODIK OSZTÁLY

Minden állítást bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény puszta közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

- Ossz fel egy 6×4 -es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész
(a) hatszög
(b) nyolcszög
(c) tízszög

legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra!



- Van egy 4 számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazzt gyártunk úgy, hogy elkészítjük bármely 3 szám összegét. Három ilyen lépés után a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazzt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?
- Meg lehet-e adni 50 egész számot úgy, hogy az összegük egy 10-nél nagyobb prímszám, a szorzatuk pedig egy ennél 1-gyel kisebb négyzetszám legyen?

FOLYTATÁS A TÚLOLDALON!

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott számok közül az egyik osztója a másiknak. Az 1442 például különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, valamint a 144-nek osztója a 2.
Hány különleges szám van 500000 és 600000 között?
5. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy 10×10 -es táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyzi a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 9 mezőt a gondoltak közül?

2017. május 19.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

HATODIK OSZTÁLY

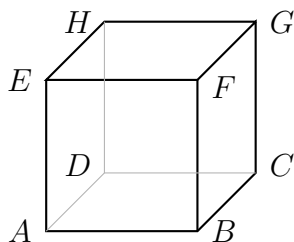
Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztán közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. Gyula bácsi négy legkedvesebb galambja egy 6×2 -es elrendezésű galambdúcban lakik. A legjobb tenyészpárjának tagjait, Királyt és Dámát egy szinten lévő, szomszédos dúcokban helyezte el. Sem alattuk, sem felettük, sem a szomszédos dúcokban nincs másik galamb. A legjobb madarát, Ászt, és a legígéretesebbet, Bubit egy-egy fennmaradó dúcba költöztette. Hányféle elrendezésben lakhat Gyula bácsi 4 kedvenc madara?

2. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy 3×3 -as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban ugyanannyi legyen a számok összege, és minden oszlopban is ugyanannyi legyen a számok összege?
- (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
(b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4
(c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

FOLYTATÁS A TÚLOLDALON!

3. Színezd meg egy kocka éleit úgy, hogy minden csúcsban az egy csúcsba futó élek különböző színűek legyenek!
- (a) Legkevesebb hány színnel oldható meg ez a színezés?
- (b) A legkevesebb színt használva hány különböző megoldás van? Két megoldást különbözőnek tekintünk, ha van olyan él (pl. BF), amelynek színe a két megoldásban különböző.



4. A sakktábla A1 mezőjéről sétálni indul egy vezér. Egy lépésben balra, jobbra, felfelé, lefelé vagy a 4 átlós irány bármelyikében léphet akármennyit. Csak olyan mezőre léphet, amelyen még előzőleg nem járt. Nem lehet két egyforma lépése, azaz amelyeknek az iránya és nagysága is megegyezik.
- (a) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla első két sorának minden mezőjét bejárja, de más mezőre nem lép?
- (b) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla minden mezőjét bejárja?
- (c) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér nem lép a 8. sor és a H oszlop mezőire, minden más mezőre viszont igen?

Megjegyzés: egy 2×3 -as téglalap bejárható ily módon. Az alábbi ábra mutatja a bejárást. A mezőben álló szám jelzi, hogy hányadik lépésben lép a vezér arról a mezőről. Ha a fentiek közül valamelyik feladat megoldható, akkor a megoldást ilyen formában add meg:

2	6	2	4
1	1	5	3
	A	B	C

2017. május 20.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
 Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

HETEDIK OSZTÁLY

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztá közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. Előállítható-e a 22222244444 szám öt egymást követő egész szám szorzataként?
2. Van egy négy számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt készítünk úgy, hogy az összes lehetséges módon elkészítjük a meglévő halmazból három szám összegét. Három lépés után a $\{63, 68, 69, 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?
3. $ABCDEF$ egy szabályos hatszög, melynek területe 1 területegység. (Az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik.) X a CD oldal felezőpontja, Y pedig az EF oldalé. Mekkora az $ABCXYF$ hatszög területe? (A szabályos sokszögek minden oldala és szöge egyenlő.)
4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott két szám közül az egyik osztja a másikat. Például az 1442 különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, és a 144-nek osztója a 2. Hány különleges szám van 800 000 és 900 000 között?
5. Beírtuk egy 6×6 -os táblázat mezőibe az egész számokat 1-től 36-ig úgy, hogy az egymást követő számok oldalszomszédos mezőkbe kerültek, de a 4 többszöröseit tartalmazó mezőknek nincs közös csúcsa.
 - (a) Mutasd meg, hogy ekkor a 36 csak valamelyik sarokmezőbe kerülhetett!
 - (b) Adj példát a feltételeknek megfelelő kitöltésre!

2017. május 19.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

HETEDIK OSZTÁLY

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztá köze, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?
2. Az ABC szabályos háromszög BC oldalának belső pontja X , CA oldalának belső pontja Y , AB oldalának belső pontja Z . Hány darab egyenlő szárú háromszög lehet az AYZ , BXZ , CXY , XYZ háromszögek között? Az összes lehetőségre mutass példát!
3. Két játékos, A (aki a játékot kezdi) és B a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad. Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható négygel, B nyeri a játékot, egyébként pedig A . Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát! (Ha a játék végén 0 marad, akkor B nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)
4. Egy 7 fős rablóbanda rabolt egy zsák aranyat. Szétrakták az asztalon, majd így osztottak: először egyikük megszámolta az aranyakat, majd elvett annyit, amennyi a darabszám számjegyeinek összege. Ezután a jobb oldali szomszédja a maradékot számolta meg, s elvett annyi aranyat, amennyi e szám jegyeinek összege, s így folytatták tovább. Azt tapasztalták, hogy épp akkor fogyott el, mikor mindenki ugyanannyiszor vett már, sőt, mindenkinek ugyanannyi arany jutott a vezért kivéve. Őhöz több arany került. Tudjuk még, hogy 200-nál nem fér több arany egy zsákba. Hány arany lehetett kezdetben, és hanyadikként vett a rablóvezér?

2017. május 20.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztán közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. Lehet-e találni két egymást követő kettőhatványt, melyek összege négyzetszám?
(Kettőhatványnak nevezünk az $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ sorozat tagjait, ahol minden tag az öt megelőző kétszerese.)
2. Egy sokszög minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám, az összes belső szögének nagysága pedig 60° vagy 240° . Lehet-e a sokszög oldalainak száma
 - (a) 2016?
 - (b) 2017?
3. Ki lehet-e színezní a sík pontjait négy színnel úgy, hogy ne lehessen találni négy darab egyszínű pontot, melyek egy téglalap négy csúcsát alkotják?
4. Egy 0-tól és 1-től különböző racionális számból kiindulva műveleteket hajtunk végre. Egy lépésben a következő két művelet valamelyikét: vehetjük egy meglévő szám reciprokát, vagy egy meglévő számot kivonhatunk egyből. A kapott számot a következő lépésben már felhasználhatjuk. Ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg már nem jöhet ki új szám. A kiinduló szám értékétől függően hányféle számot kaphatunk ilyen módon? Az összes lehetőségre mutass példát!
5. 16 csapat körmérkőzést játszik, mindenki mindenkivel pontosan egyszer találkozik. Minden mérkőzésen az egyik csapat nyer, a másik veszít, döntetlen nincsen. Add meg a 12 győzelmet elérő csapatok számának legnagyobb lehetséges értékét!

2017. május 19.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztá közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?
2. Két játékos, A (aki a játékot kezdi) és B a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad.
Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható négygel, B nyeri a játékot, egyébként pedig A . Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát!
(Ha a játék végén 0 marad, akkor B nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)
3. Egy 5×5 -ös táblázat mezőibe beírtuk a pozitív egész számokat 1-től n -ig (mindegyiket egyszer), a kimaradó mezőkbe pedig nullákat írtunk. A kitöltést *érdekesnek* nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban egyenlő a beírt számok összege. Melyik a legkisebb pozitív egész n , melyre található *érdekes* kitöltés?
4. Melyek azok az $ABCD$ négyszögek, melyek belsejében található olyan P pont, hogy a PA , PB , PC , PD szakaszok a négyszög belsejében haladnak, és az ABP , BCP , CDP és DAP háromszögek területe mind egyforma? Igyekezz minél egyszerűbb jellemzést adni!

2017. május 20.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.