TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

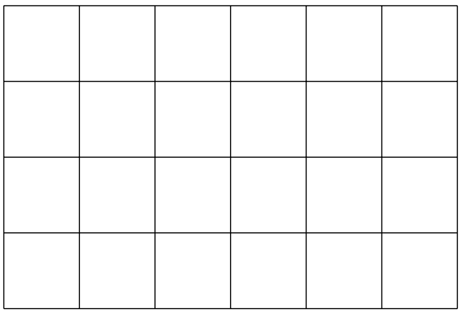
1. 4 testvér (akik között nincsenek ikrek) beszélget születésük sorrendjéről. Kettő közülük hazudik, kettő igazat mond.
   András: Dávid a legfiatalabb.
   Boldizsár: Dávid a legöregebb és Boldizsár a legfiatalabb.
   Csilla: Én születtem legkésőbb.
   Dávid: Sem legfiatalabb, sem legöregebb nem vagyok.
   Melyik két testvér állítása igaz?

   Megoldás
   András, Boldizsár és Csilla közül akárhogy is választunk ki kettőt, azok ellentmondanak egymásnak. Ez azt jelenti, hogy Dávid igazat mond.
   Mivel Dáviddal ellentéteset állít mind András, mind pedig Boldizsár, így a másik, aki igazat mond, csakis Csilla lehet.
   Ezek után egy lehetséges születési sorrend: András, Dávid, Boldizsár, Csilla. Látható, hogy ennek a sorrendnek pontosan Csilla és Dávid állítása felel meg.

2. Ossz fel egy 6×4-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész

   (a) hatszög
   (b) nyolcszög
   (c) tízszög

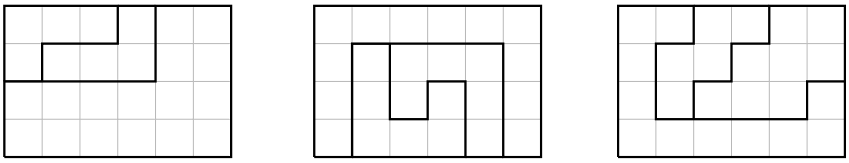
   legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás
Minden esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

(a) Három hatszög: (b) Három nyolcszög: (c) Három tízszög:



3. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy 5×5-ös táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyez a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 12 mezőt a gondoltak közül?

Megoldás
Mivel Pisti 7 mezőt nem jelöl be ($25 - 18 = 7$), így Aladár legfeljebb 7 „rosszat”, ezt a 7-et színezheti be, vagyis az első kérdéssel legalább 11 mezőt eltalál. Ezen a 11 mezőn kívül 14 mező van még, amiből Aladár már tudja, hogy melyik az a legfeljebb 7 mező, amit Pisti nem jelölt be, s így azt is, hogy melyiket igen. Több kérdésre tehát nincs szüksége, a válasz: 1. Ha Aladár az első kérdésével 7-nél kevesebb „rosszat” talált el, akkor viszont legalább 12 „jót” jelölt, ekkor is elég 1 kérdés.

4. Adottak a következő törtek:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$

Minden lépésben készíthetünk egy új számot úgy, hogy a következő két művelet valamelyikének végeredményével bővítjük az eddigi számok halmazát:

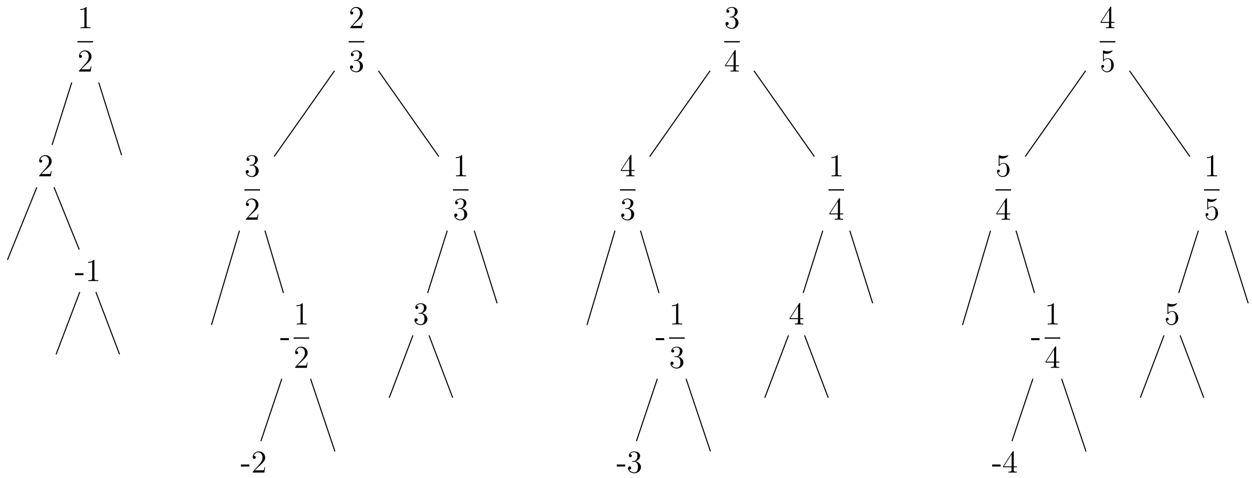
- egy meglévő számban felcseréljük a számlálót és a nevezőt;
- egy meglévő számot kivonunk 1-ből.

Hány számot kaphatunk így, ha akárhány lépést elvégezhetünk? (Az újonnan kapott számot a következő lépésben már felhasználhatjuk.)
(A törteknek minden esetben a legegyszerűbb alakját használd! Pl.: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ és $\frac{3}{1} = 3$.)

Megoldás
Vegyük sorban az adott számokat, és szemléltessük a ábrán a kérdéses változtatásokat. A bal

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

oldali ágak mindig az első átalakítást jelentik, a jobb oldaliak pedig a másodikat. Ha már korábban szereplő számhoz jutunk, akkor ezt már nem szerepeltetjük újra, és itt a lépés-sorozat véget ér.



Az $\frac{1}{2}$-ből nyerhető új számok: $2, -1$.

A $\frac{2}{3}$-ból nyerhető új számok: $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 3, -2$.

A $\frac{3}{4}$-ból nyerhető új számok: $\frac{4}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 4, -3$.

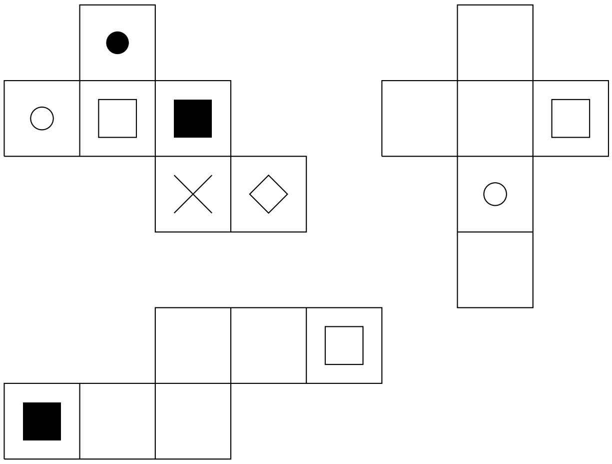
A $\frac{4}{5}$-ból nyerhető új számok: $\frac{5}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, 5, -4$.

Összesen 21 szám fog szerepelni a megadottakkal együtt.

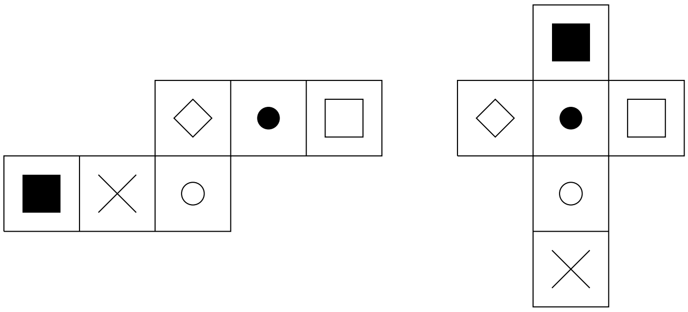
(Másik - nem ötödikestől elvárt - megoldás: ha egy $\frac{a}{b}$ törtből indulunk ki, ahol $a \neq b$, akkor belőle a következő számok érhetők el: $\frac{b}{a}, \frac{a-b}{a}, \frac{b-a}{b}, \frac{b}{b-a}, \frac{a}{a-b}$, melyek között lehetnek egyenlőek. a és b helyére beírva az adott számokat, majd elhagyva a már korábban megjelenőeket, kapjuk a megoldásokat.)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy papírból készült kocka lapjaira kívülről mintákat rajzoltunk. Ezután szétnyitottuk a kockát, kiterítettük, így az első ábrán látható hálót kaptuk. A másik két hálóból pontosan ugyanilyen kockát szeretnénk hajtogatni.
Rajzold be a hiányzó mintákat a megfelelő négyzetekbe! (A papír nem átlátszó, és a mintát csak az egyik oldalon rajzoljuk meg.) Elegendő megadni a helyes ábrát, nincs szükség indoklásra.



Megoldás



A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

---

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

1. Egy 14 fős baráti társaságban üveggolyókat gyűjtenek: pirosat, zöldet és sárgát. A következőket tudjuk:

   (1) Akinek nincs zöld, annak van piros vagy sárga.

   (2) Akinek nincs sárga, annak van piros.

   (3) Közülük 7-nek pontosan 2-féle üveggolyója van.

   (4) Ötüknek eddig csak 1-félét sikerült gyűjteni.

   Válaszolj az alábbi kérdésekre:

   (a) Hánynak nincs eddig még üveggolyója?

   (b) Hánynak van mindhárom fajta?

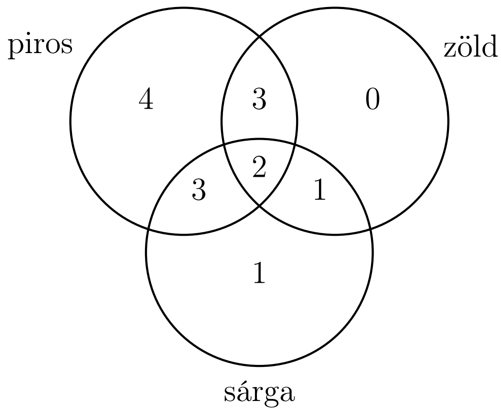
   (c) Van-e olyan társaság, melyre az összes feltétel teljesül?

Megoldás

(a) Nincs közöttük olyan személy, akinek ne lenne legalább egy üveggolyója, hiszen a feltétel értelmében, akinek nincs zöld golyója, annak van más színű.

(b) Mivel 5-nek van pontosan 1-féle, 7-nek pontosan 2-féle színű üveggolyója,ez 12 fő, továbbá mindenkinek van legalább az egyik színből és összesen 14-en vannak, így $14 - 12 = 2$ ember van a társaságban, akinek mindhárom színű üveggolyója van.

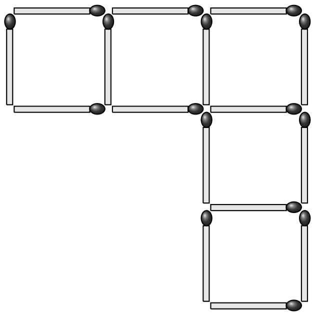
(c) Egy lehetséges esetet mutat az alábbi ábra:



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megjegyzés: Csak zöld golyója egyetlen egy embernek sem lehet, máskülönben egy ilyen személyre nem teljesülne a (2) feltétel. Ha ezt a versenyző megállapítja, vagy az általa megadott társaságra ez fennáll, de valamelyik egyéb feltétel nem teljesül, akkor itt kapjon 1 pontot a 2 helyett.

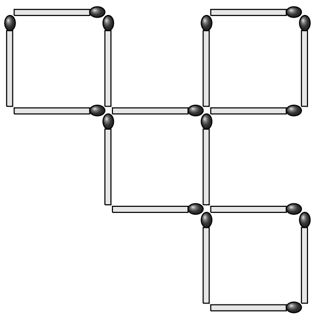
2. (a) Helyezz át az ábrán két gyufaszálat úgy, hogy a négyzetek száma 4-re csökkenjen, és minden gyufaszál valamelyik négyzet teljes oldalát alkossa.



(b) Hány megoldás lehetséges? (Két megoldás különböző, ha az áthelyezések után valamelyikben van gyufa egy olyan helyen, ahol a másikban nincs.)

Megoldás

(a) Összesen 16 szál gyufánk van, amikből csakis úgy képezhetünk 4 négyzetet a feltételek szerint, hogy minden gyufaszál pontosan egy négyzetnek alkotja a teljes oldalát (azaz nincsenek közös oldalú négyzetek).



(b) A két gyufaszál elvételével meg kell szüntetnünk két négyzetet, és létre kell hoznunk egy újat. Ez csak úgy lehetséges, hogy oda helyezzük le a gyufaszálakat, ahol már egy leendő négyzet két oldala megvan. Ezt kizárólag az ábrán látott módon tehetjük meg. Mivel két gyufaszálat mozgatunk, és két helyre tesszük le őket, így csak egyetlen megoldás létezik.

3. Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ DABC \\ CDAB \\ +\quad CDA \\ \hline CCCCB \end{array}$$

Add meg az $ABCD$ négyjegyű szám összes lehetséges értékét!

Megoldás
Három különböző számjegy összegének maximuma 24, négynek pedig 30, így C értéke 1 vagy 2.

(a) $C = 1$:

$$\begin{array}{r} AB1D \\ DAB1 \\ 1DAB \\ +\quad 1DA \\ \hline 1111B \end{array}$$

Az egyesek helyén történő összeadás miatt $A + D = 9$. Itt 1-et továbbviszünk, s így a tízesek helyén történő összeadás miatt $B = 0$. A többi összeadás ekkor már teljesül. Az összes lehetséges eset:

$$2017,\ 3016,\ 4015,\ 5014,\ 6013,\ 7012.$$

(Ahány szám hiányzik, annyival kevesebb pont jár ebből a 3 pontból.)

(b) $C = 2$:

$$\begin{array}{r} AB2D \\ DAB2 \\ 2DAB \\ +\quad 2DA \\ \hline 2222B \end{array}$$

Az egyesek helyén történő összeadás miatt $A+D = 8$. Itt 1-et továbbviszünk, s így a tízesek helyén történő összeadás miatt $B = 1$. A százasok helyén álló számjegyek összeadása ekkor teljesül, viszont az ezresek helyén állóké nem, hiszen itt: $A+D+2=10$, amihez hozzáadva a százasok összeadásából keletkező 1-et, 11-et kapunk, ami nem 2-re végződik. Ekkor tehát nincs megoldás.

4. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy 3×3-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban egyenlő legyen a számok összege, és minden oszlopban is egyenlő legyen a számok összege?

   (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

   (b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

   (c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

Megoldás

(a) Igen. Mivel a 9 szám összege 45, ezért soronként és oszloponként is 15 a számok összege. Egy lehetséges kitöltés:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(b) Nem. A számok összege 29, ami nem osztható hárommal, míg a három egyenlő sorösszeg összege csak hárommal osztható számot adhat.

(c) Nem. A számok összege 48, ezért az egyenlő sor- és oszlopösszegek értéke 16 lenne. Nézzük a 11 sorát és oszlopát egy feltételezett jó kitöltésben. Csak kétféle módon egészíthető ki 11 16-ra a megadott számokkal: $11+0+5$ és $11+1+4$. Most nézzük a 10 sorát és oszlopát (amik különböznek 11 sorától és oszlopától). A 10 mellé 6 összegű számpár kellene, de ilyet nem találunk a megmaradt számok között. A beírás tehát nem lehetséges.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

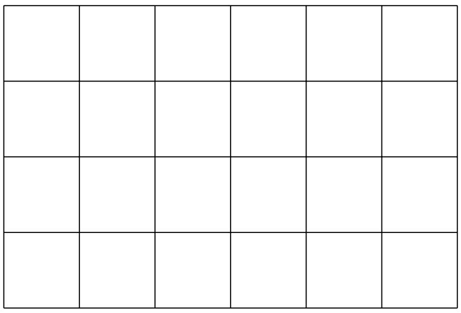
46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

HATODIK OSZTÁLY

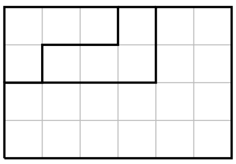
1. Ossz fel egy 6×4-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész
   (a) hatszög
   (b) nyolcszög
   (c) tízszög

   legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.

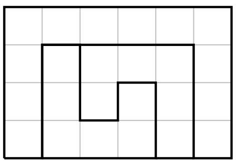


Megoldás
Minden esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

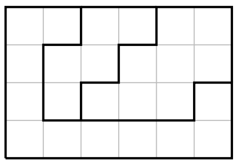
(a) Három hatszög:



(b) Három nyolcszög:



(c) Három tízszög:



2. Van egy 4 számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt gyártunk úgy, hogy elkészítjük bármely 3 szám összegét. Három ilyen lépés után a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

1. megoldás
Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt

minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63 + 68 + 69 + 70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összeg 90, azt megelőzően 30, és a kiinduló halmazban pedig 10.

Egy lépésben keletkező új számok olyanok, hogy egy régi elemmel kisebbek az előző 4 szám összegénél. Így ha a végén a legkisebb számnál 5-tel, 6-tal illetve 7-tel nagyobb a többi, akkor az előző lépésben a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, 7-tel kisebb volt a többi, még eggyel korábban ismét ennyivel nagyobbak, mint a legkisebb, és a kiinduláskor pedig ennyivel kisebbek, mint a legnagyobb.

Keresünk tehát négy egész számot, amiknek az összege 10, és a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, illetve 7-tel kisebb a másik 3. Ilyen számnégyes csak a $0, 1, 2, 7$.

2. megoldás

Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63+68+69+70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összegnek 90-nek kellett lennie. Ebben az utolsó lépés előtti halmazban a három legnagyobb szám összege 70, ezt a 90-ből kivonva megkapjuk, hogy ekkor a legkisebb szám a 20 volt.

Ugyanígy a többi elem is meghatározható: $90 - 69 = 21$, $90 - 68 = 22$ és $90 - 63 = 27$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy még egy lépéssel korábban 30 volt az összeg, a számok pedig 3, 8, 9 és 10. Ugyanígy adódik, hogy az első lépést megelőzően 10 volt az összeg, az eredeti négy szám pedig 0, 1, 2 és 7.

3. megoldás

Legyen az eredeti halmaz $\{a; b; c; d\}$, ahol $a < b < c < d$. (Ez utóbbi feltételezhető, mert egy halmaz elemei különböznek.) A három lépés így módosítja az elemeket:

$$\begin{aligned}
&\{a; b; c; d\} \to \\
&\{a + b + c;\quad a + b + d;\quad a + c + d;\quad b + c + d\} \to \\
&\{3a + 2b + 2c + 2d;\quad 2a + 3b + 2c + 2d;\quad 2a + 2b + 3c + 2d;\quad 2a + 2b + 2c + 3d\} \to \\
&\{7a + 7b + 7c + 6d;\quad 7a + 7b + 6c + 7d;\quad 7a + 6b + 7c + 7d;\quad 6a + 7b + 7c + 7d\}
\end{aligned}$$

Az eredeti feltétel miatt a kapott négyesek is különböző számokból állnak. Ha az eredeti halmazban $S = a + b + c + d$ a számok összege, akkor a lépések után kapott halmazok elemeinek összege rendre $3S$, $9S$ és $27S$. Innen $27S = 63 + 68 + 69 + 70 = 270$, vagyis $S = 10$.

Az utolsó halmazban az elemek

$$\{7S - d;\quad 7S - c;\quad 7S - b;\quad 7S - a\},$$

ezek 70-nél éppen d-vel, c-vel, b-vel és a-val kisebbek és ez a halmaz megegyezik a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazzal. Innen az eredeti négy szám: $\{0; 1; 2; 7\}$.

3. Meg lehet-e adni 50 egész számot úgy, hogy az összegük egy 10-nél nagyobb prímszám, a szorzatuk pedig egy ennél 1-gyel kisebb négyzetszám legyen?

   Megoldás
   17 egy olyan prímszám, aminél az eggyel kisebb szám négyzetszám. Próbáljunk meg megadni számokat úgy, hogy összegük 17 legyen, szorzatuk pedig 16.
   Legyen az egyik szám 16, az összes többi, pedig vagy 1 vagy -1. Ekkor páros sok -1-re van szükségünk, hogy a szorzat 16 legyen és eggyel több 1-re, mint -1-re, hogy az összegük 17 legyen. Ha tehát a számaink: 1 darab 16, 25 darab 1 és 24 darab -1, akkor ezek a számok megfelelnek a feltételnek:

$$16 + 25 \cdot 1 + 24 \cdot (-1) = 17$$
$$16 \cdot 1^{25} \cdot (-1)^{24} = 16$$

   Tehát a feltett kérdésre igen a válasz.

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott számok közül az egyik osztója a másiknak. Az 1442 pélául különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, valamint a 144-nek osztója a 2.
   Hány különleges szám van 500000 és 600000 között?

   Megoldás
   Mivel a 0 nem megengedett számjegy, a különleges számok alakja $\overline{5abcde}$, továbbá $5 \mid \overline{abcde}$ miatt $e = 5$. Mivel $e \mid \overline{5abcd}$ és $e = 5$, ezért $d = 5$. Tudjuk, hogy $\overline{5a} \mid \overline{bc55}$ és $\overline{55} \mid \overline{5abc}$. A második feltétel miatt c is 5. Most két háromjegyűre vágva a számot vagy $\overline{5ab} \mid \overline{555}$ vagy $\overline{555} \mid \overline{5ab}$ kell, hogy teljesüljön. Mivel mindkét szám 500-nál nagyobb, csak egyenlők lehetnek, mert már a kétszeresük is négyjegyű. Innen azt kaptuk, hogy $a = b = 5$. Az egyetlen különleges szám tehát a megadott intervallumban az 555555.

5. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy 10×10-es táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyez a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 9 mezőt a gondoltak közül?

   Megoldás
   Négy kérdés nem lehet elég, hiszen négy kérdésből legfeljebb $4 \cdot 18 = 72$ mezőre tud Aladár rákérdezni, és elképzelhető, hogy minden Pisti által megjelölt mező a maradék 28 között van. A 28 megmaradt mezőből bármelyik 9 lehet jelöletlen, ezért Aladár nem tudhatja biztosan 9 jelölt mező helyét.

Öt kérdés elegendő. Aladár minden lépésben úgy jelöljön meg 18 mezőt, hogy ne legyen olyan mező, amit kétszer jelölt meg. Ekkor két lehetőség van:
1) Az $5 \cdot 18 = 90$ megkérdezett mező között volt 9 Pisti mezői közül és akkor Aladár tudja biztosan 9 megjelölt mező helyét.

2) Ha az öt kérdésben lefedett 90 mező legfeljebb 8-at tartalmaz Pisti mezői közül, akkor a maradék $100 - 90 = 10$ mező már mind megjelölt és ezek helyét Aladár ismeri, ezekre már nem kell rákérdeznie.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

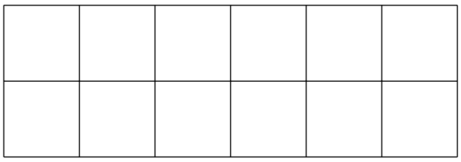
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

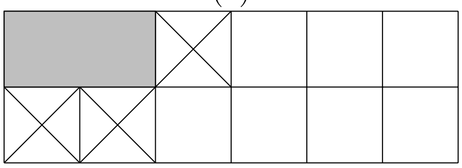
HATODIK OSZTÁLY

1. Gyula bácsi legkedvesebb galambjait egy 6×2-es elrendezésű galambdúcban őrzi. A legjobb tenyészpárjának tagjait, Királyt és Dámát egy szinten lévő, szomszédos dúcokban helyezte el. Sem alattuk, sem felettük, sem a szomszédos dúcokban nincs másik galamb. A legjobb madarát, Ászt, és a legígéretesebbet, Bubit egy-egy fennmaradó dúcba költöztette.
   Hányféle elrendezésben lakhatnak Gyula bácsi kedvenc madarai?

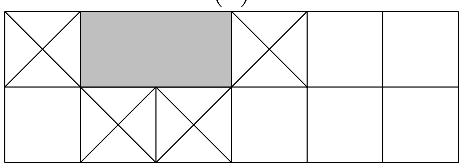


Megoldás
A Király és Dáma által elfoglalt dúcok elhelyezkedése szerint kétféle esetet különböztetünk meg: (1) az emelet „szélén” vannak; (2) az emelet „belsejében” vannak. Az ábrán X jelöli azokat a dúcokat, ahova nem kerülhet galamb.

(1)



(2)



Mindkét esetben kétféle módon lehet elhelyezni Királyt és Dámát a szürke téglalapon belül.

Az (1) esetben négy helyen lehet a szürke téglalap és a fennmaradó 7 dúcban $7 \cdot 6 = 42$-féle módon lehet Ász és Bubi.

A (2) esetben hat helyen lehet a szürke téglalap és a fennmaradó 6 dúcban $6 \cdot 5 = 30$-féle módon lehet Ász és Bubi.

Így összesen $2 \cdot (4 \cdot 42 + 6 \cdot 30) = 696$ lehetőség van.

2. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy 3×3-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban ugyanannyi legyen a számok összege, és minden oszlopban is ugyanannyi legyen a számok összege?

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

(a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

(c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

Megoldás

(a) Igen. Mivel a 9 szám összege 45, ezért soronként és oszloponként is 15 a számok összege. Egy lehetséges kitöltés:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

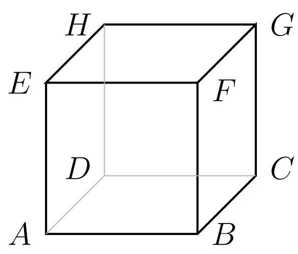
(b) Nem. A számok összege 29, ami nem osztható hárommal, míg a három egyenlő sorösszeg összege csak hárommal osztható számot adhat.

(c) Nem. A számok összege 48, ezért az egyenlő sor- és oszlopösszegek értéke 16 lenne. Nézzük a 11 sorát és oszlopát egy feltételezett jó kitöltésben. Csak kétféle módon egészíthető ki 11 16-ra a megadott számokkal: $11 + 0 + 5$ és $11 + 1 + 4$. Most nézzük a 10 sorát és oszlopát (amik különböznek 11 sorától és oszlopától). A 10 mellé 6 összegű számpár kellene, de ilyet nem találunk a megmaradt számok között. A beírás tehát nem lehetséges.

3. Színezd meg egy kocka éleit úgy, hogy minden csúcsban az egy csúcsba futó élek különböző színűek legyenek.

(a) Legkevesebb hány színnel oldható meg ez a színezés?

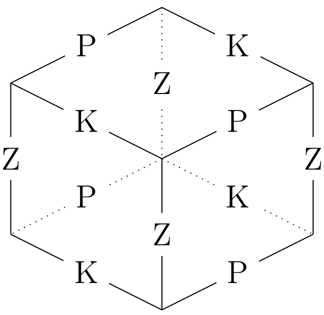
(b) A legkevesebb színt használva hány különböző megoldás van, ha két megoldást különbözőnek tekintünk, ha van olyan él (pl. BF), amelynek színe a két megoldásban különböző?



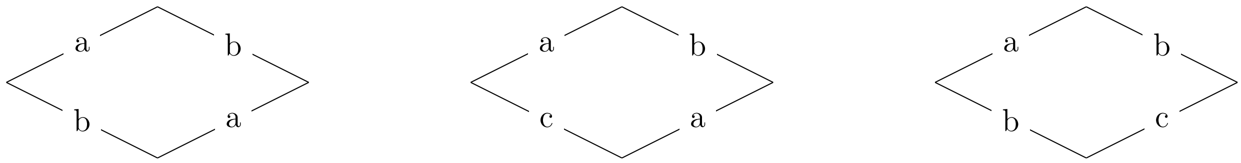
Megoldás

(a) Három szín szükséges, hiszen egy csúcsba három él fut be. Ennyi elegendő is:

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

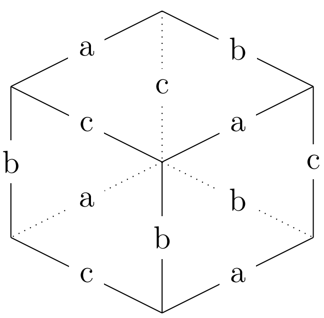


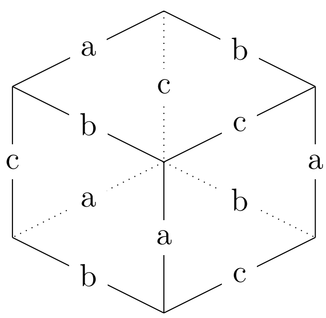
(b) Rögzítsük az előző ábra felső csúcsából induló három él színét! Ezt 6 különböző módon tehetjük meg. Ha tehát rögzítjük ezt a három színt, akkor az így kapott jó színezések hatszorosa lesz a válasz. Most ágazzunk szét aszerint, hogyan néz ki a felső lap. Erre három lehetőség van.



Ha most a szabály betartásával szeretnénk befejezni a színezést, akkor az első esethez két befejezés tartozik: „lefelé" minden él c, az alsó lap pedig a fenti ábrának megfelelő, vagy annak 90°-os elforgatottja.

A másik két eset befejezése egyértelműen meghatározott:





Tehát összesen $6 \cdot (2 + 1 + 1) = 24$ a különböző színezések száma.

4. A sakktábla A1 mezőjéről sétálni indul egy vezér. Egy lépésben balra, jobbra, felfelé, lefelé vagy a 4 átlós irány bármelyikében léphet akármennyit. Csak olyan mezőre léphet, amelyen még előzőleg nem járt. Nem lehet két egyforma lépése, azaz amelyeknek az iránya és nagysága is megegyezik.

   (a) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla első két sorának minden mezőjét bejárja, de más mezőre nem lép?

   (b) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla minden mezőjét bejárja?

(c) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér nem lép a 8. sor és a H oszlop mezőire, minden más mezőre viszont igen?

Megjegyzés: egy 2×3-as téglalap bejárható ilymódon. Az alábbi ábra mutatja a bejárást. A mezőben álló szám jelzi, hogy hányadik lépésben lép a vezér arról a mezőről. Ha a fentiek közül valamelyik feladat megoldható, akkor a megoldást ilyen formában add meg:

2	6	2	4
1	1	5	3
	A	B	C

Megoldás

(a) Igen, lehetséges. Az alábbi ábra mutat egy lehetséges bejárást.

2	16	14	12	10	9	11	13	15
1	1	3	5	7	8	6	4	2
	A	B	C	D	E	F	G	H

(b) A vezérnek jobbra, balra, felfelé és lefelé is 7-féle lehetséges lépése van. Ugyanez a helyzet mind a négy átlós lépés esetén is. Összesen tehát $8 \cdot 7 = 56$ különböző lépése van a vezérnek. A teljes tábla bejárásához 63 lépésre van szükség, tehát nincs ilyen bejárás.

(c) Most minden irányban 6-féle lépés lehetséges, vagyis összesen $8 \cdot 6 = 48$ féle. A bejáráshoz 48 lépésre van szükség (hiszen 49 mezőből áll a bejárandó terület), így minden lehetséges lépést fel kellene használni. Ez azonban nem lehetséges, hiszen balra lefelé átlós irányban hetet lépni csak a G7 mezőről lehetséges, ekkor azonban visszalépnénk a kiindulási mezőre. Ilyen bejárás tehát szintén nem lehetséges.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

HETEDIK OSZTÁLY

1. Előállítható-e a 22222244444 szám öt egymást követő egész szám szorzataként?

1. megoldás
Öt egymást követő szám közül mindig van (pontosan) egy, amelyik osztható 5-tel. Az öt szám szorzata ennek többszöröse, így maga is osztható 5-tel. Egy szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha az utolsó jegye osztható 5-tel. Mivel a 4 nem osztható 5-tel, így a 22222244444 sem. Mivel öt egymást követő egész szám szorzataként csak 5-tel osztható számok állítható elő, a kérdéses előállítás nem létezik.

2. megoldás
Az előző megoldáshoz hasonló gondolatmenet a 3-mal való oszthatóságra is alkalmazható: öt egymást követő szám között mindig van hárommal osztható is, így a szorzat is osztható 3-mal. Azonban a 22222244444 nem osztható 3-mal, mivel számjegyeinek összege (32) nem osztható 3-mal. Így az előállítás nem lehetséges.

2. Van egy négy számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt készítünk úgy, hogy az összes lehetséges módon elkészítjük a meglévő halmazból három szám összegét. Három lépés után a $\{63, 68, 69, 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

1. megoldás
Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63 + 68 + 69 + 70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összeg 90, azt megelőzően 30, és a kiinduló halmazban pedig 10.

Egy lépésben keletkező új számok olyanok, hogy egy régi elemmel kisebbek az előző 4 szám összegénél. Így ha a végén a legkisebb számnál 5-tel, 6-tal illetve 7-tel nagyobb a többi, akkor az előző lépésben a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, 7-tel kisebb volt a többi, még eggyel korábban ismét ennyivel nagyobbak, mint a legkisebb, és a kiinduláskor pedig ennyivel kisebbek, mint a legnagyobb.

Keresünk tehát négy egész számot, amiknek az összege 10, és a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, illetve 7-tel kisebb a másik 3. Ilyen számnégyes csak a $0, 1, 2, 7$.

2. megoldás
Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63+68+69+70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összegnek 90-nek kellett lennie. Ebben az utolsó lépés előtti halmazban a három legnagyobb szám összege 70, ezt a 90-ből kivonva megkapjuk, hogy ekkor a legkisebb szám a 20 volt.

Ugyanígy a többi elem is meghatározható: $90 - 69 = 21$, $90 - 68 = 22$ és $90 - 63 = 27$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy még egy lépéssel korábban 30 volt az összeg, a számok pedig 3, 8, 9 és 10. Ugyanígy adódik, hogy az első lépést megelőzően 10 volt az összeg, az eredeti négy szám pedig 0, 1, 2 és 7.

3. megoldás
Legyen az eredeti halmaz $\{a; b; c; d\}$, ahol $a < b < c < d$. (Ez utóbbi feltételezhető, mert egy halmaz elemei különböznek.) A három lépés így módosítja az elemeket:

$$\begin{aligned}
&\{a; b; c; d\} \to \\
&\{a+b+c; \quad a+b+d; \quad a+c+d; \quad b+c+d\} \to \\
&\{3a+2b+2c+2d; \quad 2a+3b+2c+2d; \quad 2a+2b+3c+2d; \quad 2a+2b+2c+3d\} \to \\
&\{7a+7b+7c+6d; \quad 7a+7b+6c+7d; \quad 7a+6b+7c+7d; \quad 6a+7b+7c+7d\}
\end{aligned}$$

Az eredeti feltétel miatt a kapott négyesek is különböző számokból állnak. Ha az eredeti halmazban $S = a + b + c + d$ a számok összege, akkor a lépések után kapott halmazok elemeinek összege rendre $3S$, $9S$ és $27S$. Innen $27S = 63 + 68 + 69 + 70 = 270$, vagyis $S = 10$.

Az utolsó halmazban az elemek

$$\{7S - d; \quad 7S - c; \quad 7S - b; \quad 7S - a\},$$

ezek 70-nél éppen d-vel, c-vel, b-vel és a-val kisebbek és ez a halmaz megegyezik a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazzal. Innen az eredeti négy szám: $\{0; 1; 2; 7\}$.

3. $ABCDEF$ egy szabályos hatszög, melynek területe 1 területegység. (Az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik.) X a CD oldal felezőpontja, Y pedig az EF oldalé. Mekkora az $ABCXYF$ hatszög területe? (A szabályos sokszögek minden oldala és szöge egyenlő.)

Megoldás
Jelölje a hatszög oldalának hosszát a. Tudjuk, hogy a hatszög hat darab szabályos háromszögből áll, így $FC = 2a$. Mivel YX az $FCDE$ trapéz középvonala, ezért $YX = \frac{2a+a}{2} = \frac{3}{2}a$. Ha m jelöli a szabályos háromszögek magasságát, akkor a feltétel értelmében

$$1 = 6 \cdot \frac{am}{2} \Longrightarrow am = \frac{1}{3}.$$

Azt is tudjuk továbbá, hogy az $FCXY$ trapéz magassága $\frac{m}{2}$. Ezek után a kérdéses terület:

$$T(ABCXYF) = T(ABCF) + T(FCXY) = \frac{1}{2} + \frac{2a + \frac{3}{2}a}{2} \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}am = \frac{19}{24}.$$

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott két szám közül az egyik osztja a másikat. Például az 1442 különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, és a 144-nek osztója a 2. Hány különleges szám van 800 000 és 900 000 között?

Megoldás

Egy szám pontosan akkor osztható 8-cal, 4-gyel, illetve 2-vel, ha az utolsó három, kettő, illetve egyetlen számjegyéből alkotott szám osztható a szóban forgó számmal. Jelölje a kérdéses számot $\overline{8abcde}$.

Mivel $8 \mid \overline{abcde}$, ezért $8 \mid \overline{cde}$, $4 \mid \overline{de}$ és $2 \mid e$.

Mivel $e \mid \overline{8abcd}$, ezért $2 \mid d$, és mivel $4 \mid \overline{de} \mid \overline{8abc}$, ezért $4 \mid \overline{bc}$ és $2 \mid c$.

A $\overline{8ab}$ és $\overline{cde}$ számok közül valamelyik osztja a másikat, ám $\overline{8ab}$ önmagánál nagyobb többszörösei legalább négyjegyűek, így $\overline{cde} \mid \overline{8ab}$. Ezért $8 \mid \overline{cde} \mid \overline{8ab}$, amiből $8 \mid \overline{ab}$, így $2 \mid b$.

Mivel $2 \mid d$ és $4 \mid \overline{de}$, ezért $4 \mid e$. Ebből $4 \mid e \mid \overline{8abcd}$, így $4 \mid \overline{cd}$. Mivel $2 \mid c$, ebből $4 \mid d$ is következik.

Mivel $4 \mid \overline{bc}$ és $2 \mid b$, ezért $4 \mid c$.

Mivel $2 \mid c$ és $4 \mid d$, ezért $8 \mid \overline{cd0}$, így $8 \mid \overline{cde}$-ből $8 \mid e$ is következik. Mivel a számban nincs 0 számjegy, ezért $e = 8$.

Így $e = 8 \mid \overline{8abcd}$ miatt $8 \mid \overline{bcd}$, és mivel $2 \mid b$ és $4 \mid c$, ezért $8 \mid \overline{bc0}$. Tehát $8 \mid d$, így mivel a szám nem tartalmaz nullát, $d = 8$.

Így $\overline{cde} = 488$ vagy $\overline{cde} = 888$, azonban előbbinek nincs $\overline{8ab}$ alakú többszöröse, utóbbiból pedig $\overline{8ab} = 888$ következik. Tehát 800 000 és 900 000 között egyetlen különleges szám van: a 888 888.

5. Beírtuk egy 6×6-os táblázat mezőibe az egész számokat 1-től 36-ig úgy, hogy az egymást követő számok oldalszomszédos mezőkbe kerültek, de a 4 többszöröseit tartalmazó mezőknek nincs közös csúcsa.

   (a) Mutasd meg, hogy ekkor a 36 csak valamelyik sarokmezőbe kerülhetett!

   (b) Adj példát a feltételeknek megfelelő kitöltésre!

Megoldás

Osszuk fel a 6×6-os táblázatot 9 darab 2×2-es táblázatra. Egy ilyen 2×2-es tartományban nem állhat egynél több 4-gyel osztható szám, hiszen ekkor a mezőiknek lenne közös csúcsa. Mivel 9 darab 4-gyel osztható szám van, ezért a fentiek miatt minden 2×2-es részbe pontosan egynek kell közülük kerülnie.

Színezzük ki a táblázatot sakktáblaszerűen. Látható, hogy ha egy mezőről mindig oldallal szomszédos mezőre lépve 4 lépésben eljutunk egy másik mezőre, akkor a két mező biztosan azonos

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

színű. Ebből következik, hogy a 4-gyel osztható számokat tartalmazó mezők mind azonos színűek.

Vizsgáljuk a középső 2×2-es részt. Forgassuk úgy a táblázatot, hogy az ebben a részben szereplő 4-gyel osztható szám ($4k$) a jobb alsó mezőbe kerüljön.

				X	Y
			4k	X	**4l**
		X	X	X	Y
		Y	**4m**	Y	**4n**

Ekkor az ábrán X-szel jelölt mezőbe a szomszédság miatt, az Y-nal jelölt mezőkbe a színezés miatt nem kerülhet 4-gyel osztható szám. Így a $4l$, $4m$, $4n$ jelzésű mezők biztosan 4-gyel osztható számokat tartalmaznak. Ekkor a $4n-2$ és $4n+2$ számok csak olyan mezőre kerülhetnek, amely 2 lépésben elérhető $4n$-től, és nem 4-gyel osztható szám van rajta. Egyetlen ilyen mező van, ezért csak az egyik szám kerülhet beírásra, ami csak akkor teljesül, ha $4n = 36$. Tehát a 36 csak az egyik sarokmezőbe kerülhetett, hiszen a forgatás után a jobb alsó sarokban kell lennie.

Egy példa a megfelelő kitöltésre:

4	5	**8**	9	**12**	13
3	6	7	10	11	14
2	23	22	19	18	15
1	**24**	21	**20**	17	**16**
26	25	30	31	34	35
27	**28**	29	**32**	33	**36**

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

HETEDIK OSZTÁLY

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

   1. megoldás
   Mivel 12-vel növelünk, ezért minden lépésben 2-vel növekszik az egyesek helyén álló számjegy. Ha páros számmal kezdődik a sorozat, akkor csak egy elemű lehet, mert a 2 az egyetlen páros prím. Az utolsó számjegyek tehát az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból kerülnek ki. Ráadásul valahonnan kezdve, ebben a sorrendben fogják egymást ciklikusan követni.

   Ha egy sorozat legalább 5 elemből áll, akkor szerepel benne az 5, mint utolsó számjegy. Ekkor a szám maga is csak 5 lehet, mert az az egyetlen 5-re végződő prím. Az 5 viszont csak az első elem lehet, hiszen a pozitívak a sorozat elemei és 12-vel növekszik. A leghosszabb sorozat tehát: $5, 17, 29, 41, 53$.

   2. megoldás
   Tegyük fel, hogy a sorozat legalább 5 tagból áll. Vegyük észre, hogy a p, $p + 12$, $p + 24$, $p + 36$ és $p + 48$ számok mind különböző maradékot adnak 5-tel osztva, mert a lehetséges különbségeik 12, 24, 36 vagy 48 nem oszthatók 5-tel. Mivel 5-ös maradékból 5-féle van, az egyikük osztható 5-tel. Ez csak $p = 5$ lehet, mert pozitív prímekről van szó.

   Tehát a legalább 5 tagból álló sorozatnak így kell kezdődnie: $5, 17, 29, 41, 53$, ami mind prím, tehát 5 tagja lehet a sorozatnak. 6 tagja viszont nem lehet, mert a következő szám, a 65 nem prímszám.

2. Az ABC szabályos háromszög BC oldalának belső pontja X, CA oldalának belső pontja Y, AB oldalának belső pontja Z. Hány darab egyenlő szárú háromszög lehet az AYZ, BXZ, CXY, XYZ háromszögek között? Az összes lehetőségre mutass példát.

   Megoldás
   Az AYZ, BXZ, CXY háromszögeknek van 60°-os szöge, így ezek akkor és csak akkor egyenlő szárúak, ha szabályosak is.

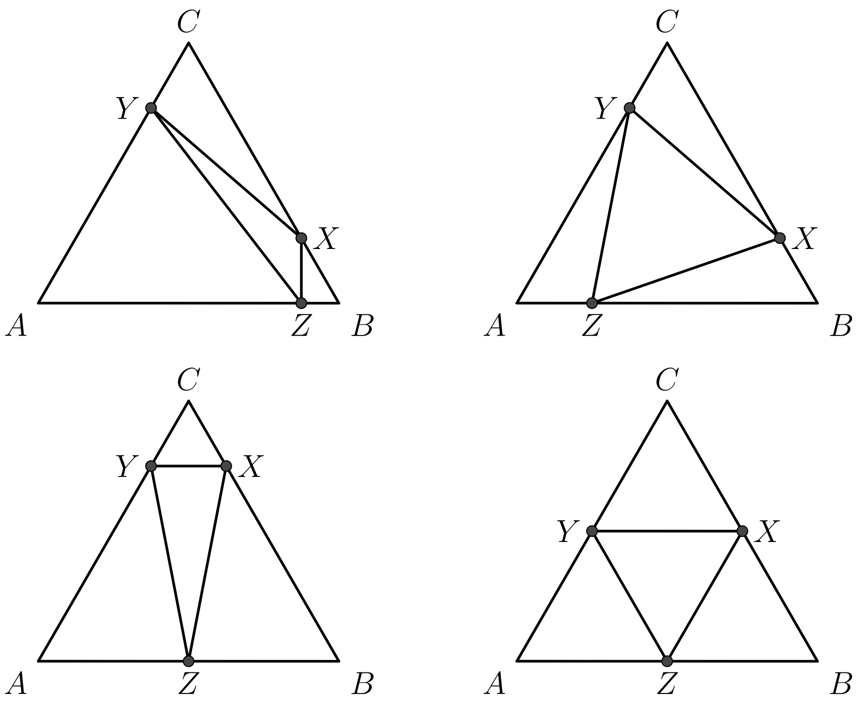
   0 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például X a B-hez legközelebbi, Y a C-hez legközelebbi negyedelőpont, Z pedig a B-hez legközelebbi nyolcadolópont. Ellenőrizhető, hogy az XYZ háromszög oldalai páronként különböző hosszúságúak, és nem párhuzamosak ABC oldalaival.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

1 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például X a B-hez, Y a C-hez, Z az A-hoz legközelebbi negyedelőpont a megfelelő oldalon. Ekkor az XYZ háromszög a szimmetria miatt szabályos, így egyenlő szárú, míg a másik három nem lehet szabályos, tehát egyenlő szárú sem.

2 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például X és Y a C-hez legközelebbi negyedelőpont a megfelelő oldalon, Z pedig az AB felezőpontja. A szimmetria miatt XYZ és CXY egyenlő szárúak, a másik két háromszög viszont nem lehet szabályos, tehát egyenlő szárú sem.

4 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha X, Y és Z rendre a megfelelő oldalak felezőpontjai, ekkor mind a 4 háromszög szabályos is.



Pontosan 3 egyenlő szárú háromszöget nem kaphatunk. Ha létezne a pontoknak ilyen megválasztása, akkor az AYZ, BXZ, CXY háromszögek között lenne legalább két egyenlő szárú, amelyek így szabályosak is lennének. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek BXZ és CXY. Ekkor az $AZXY$ négyszög paralelogramma, amelyet az YZ átlója oszt fel az AYZ és XYZ háromszögekre. Ezek tehát egymás középpontos tükörképei, így vagy mindkettő egyenlő szárú, vagy egyik sem. Tehát 2 vagy 4 egyenlő szárú háromszögünk van, ami ellentmondás.

3. Két játékos, A (aki a játékot kezdi) és B a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad. Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható néggyel, B nyeri a játékot, egyébként pedig

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

A. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát. (Ha a játék végén 0 marad, akkor B nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

1. megoldás
Megmutatjuk, hogy B-nek van nyerő stratégiája.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot töröl, akkor B az 1-es törlésével eléri, hogy a szám 20-ra végződjön. Ha A az első lépésben 2-nél kisebbet töröl, akkor B a másik 2-nél kisebb jegy törlésével eléri, hogy a szám 32-re végződjön. Mindkét esetben B nyert.

Marad az az eset, hogy A elsőre a 2-est törli. Ekkor törölje B az 1-est, a megmaradó szám így 8765430.

Ha A most a 3-ast törli, B azonnal nyer. Ha 4-nél nagyobb számot töröl, akkor B a 3-as törlésével eléri, hogy a szám 40-re végződjön, ekkor is B nyer.

Tehát A csak a 4-est vagy 0-t törölheti. Törölje ekkor B a 3-ast, így a megmaradó szám $\overline{8765N}$, ahol $N = 0$ vagy $N = 4$.

Ha A 6-nál nagyobb számot töröl, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy a végződés $\overline{6N}$ legyen, ami 4-gyel osztható. Ha A az 5-öst törli, a végződés $\overline{6N}$, ekkor is B nyer. Ha A a 4-est törli, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy 76 legyen a végződés, ekkor is ő nyer.

Marad az az eset, hogy A a 6-ost törli, ekkor törölje B az 5-öst, megmarad $\overline{87N}$.

Ekkor bármit is lép A, az utolsó lépésben B meg tudja hagyni 8 és N közül valamelyiket, és mivel ez mindenképpen 4-gyel osztható szám, megnyeri a játékot.

2. megoldás
B számára egy lehetséges nyerő stratégia a következő: törölje sorra az 1, 3, 5, 7 számjegyeket. Ha ezek közül valamelyik már korábban törlődött, akkor helyette B tetszőleges másik jegyet törölhet. Megmutatjuk, hogy ilyen lépésekkel a játék során valamikor biztosan 4-gyel osztható számot kapunk.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot vagy 0-át törölt, akkor az 1-es törlése után a kapott szám 20-ra vagy 32-re végződik, tehát 4-gyel osztható. Ha A az 1-est törli, azonnal 4-gyel osztható számot kapunk. Marad az az eset, hogy A elsőként a 2-es jegyet törölte.

Három lépéspár után a megmaradó 3 jegy ekkor csak a 8, 7, 6, 4, 0 számok közül kerülhet ki. Ha a 7 és a 6 is megmaradt, akkor B nyert, hiszen a 876, 764, 760 számok mindegyike osztható 4-gyel. Ha a 7 már törlődött, akkor a szám végződése 64, 60 vagy 40, ekkor is 4-gyel osztható számot kaptunk. Ha a 7-es megmaradt, de a 6-os nem, akkor az utolsó lépéspár után csak a 8, 4, 0 számok valamelyike maradhat meg, ezek viszont 4-gyel oszthatók. Így B minden esetben megnyerte a játékot.

4. Egy 7 fős rablóbanda rabolt egy zsák aranyat. Szétrakták az asztalon, majd így osztoztak: először egyikük megszámolta az aranyakat, majd elvett annyit, amennyi e szám a számjegyeinek összege.

Ezután a jobb oldali szomszédja a maradékot számolta meg, s elvett annyi aranyat, amennyi e szám jegyeinek összege, s így folytatták tovább. Azt tapasztalták, hogy épp akkor fogyott el, mikor mindenki ugyanannyiszor vett már, sőt, mindenkinek ugyanannyi arany jutott a vezért kivéve. Őhozzá több arany került. Tudjuk még, hogy 200-nál nem fér több arany egy zsákba. Hány arany lehetett kezdetben, és hányadikként vett a rablóvezér?

Megoldás

Egy szám 9-es maradéka megegyezik számjegyei összegének 9-es maradékával. Ez azt jelenti, hogy az első kivétel után 9-cel osztható lesz a zsákban lévő aranyak száma, és ez a tulajdonság a későbbiekben is megmarad. A 200-nál nem nagyobb 9-cel osztható számok között az alábbi átmenetek lehetségesek, ha a számjegyek összegével csökkentünk:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\mathbf{198} & \to & 180 & \to & 171 & \to & 162 & \to & 153 & \to & 144 & \to & 135 & \to & \mathbf{126} & \to & 117 \\
 & & & & \uparrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & 189 & & & & & & & & & & & & 108 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
18 & \leftarrow & 27 & \leftarrow & 36 & \leftarrow & 45 & \leftarrow & \mathbf{54} & \leftarrow & 63 & \leftarrow & 72 & \leftarrow & 81 & \leftarrow & 99 \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
9 & \to & 0 & & & & & & & & & & & & 90 & &
\end{array}
$$

Mivel mind a 7 rabló ugyanannyiszor vett, ezért a kivételek száma 7-tel osztható, azaz az 1. kivétel után kapott szám csak olyan (9-cel osztható) szám lehet, ahonnan 7-tel osztva 6 maradékot adó számú lépésben jutunk el a 0-hoz. A fenti ábráról leolvasható, hogy a 198, 126, 54 értékek jöhetnek szóba. 198 arany csak úgy maradhat 1 lépés után, ha 200 aranyról indulunk. Ekkor az első rabló $2 + 9 + 9 = 20$ aranyat, a második rabló $18 + 9 + 9 = 36$ aranyat, a harmadik rabló $9 + 9 + 9 = 27$ aranyat kapna. Így nem teljesülne, hogy a vezért kivéve mindenki ugyanannyit kap, ez az eset tehát nem ad megoldást.

Ha az első lépés után 126 arany maradt, akkor a továbbiakban mindig 9 aranyat vesznek ki, kivéve az 5. rablót, aki az első kivételénél 18 aranyat kap. Ekkor tehát a 2., 3., 4., 6. és 7. rabló 18 aranyat kap összesen, az 5. rabló 27-et. Csak akkor teljesülnek a feltételek, ha az 1. rabló is 18 aranyat kap összesen, azaz kezdetben **135 arany** volt, és a vezér **5.** volt a sorban.

Ha az első lépés után 54 arany maradt, akkor innentől mindenki csak egyszer vesz el 9 aranyat. A vezér tehát csak az **1.** rabló lehet, és mivel neki többet kell vennie, az aranyak száma kezdetben **64, 65, 66, 67, 68 vagy 69** lehet. Más megoldás nem lehetséges.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Lehet-e találni két egymást követő kettőhatványt, melyek összege négyzetszám? (Kettőhatványnak nevezzük az $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ sorozat tagjait, ahol minden tag az őt megelőző kétszerese.)

   Megoldás

   Vegyük észre, hogy $2^n + 2^{n+1} = 2^n \cdot (1 + 2) = 2^n \cdot 3$. A számelmélet alaptétele miatt ez a szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel. A 3-mal osztható négyzetszámok azonban 9-cel is oszthatók, mert az alapjuknak is oszhatónak kell lennie 3-mal. Tehát a feladat kérdésére a válasz: nem lehet találni.

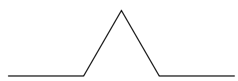
2. Egy sokszög minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám, az összes belső szögének nagysága pedig 60° vagy 240°. Lehet-e a sokszög oldalainak száma

   (a) 2016?

   (b) 2017?

   Megoldás

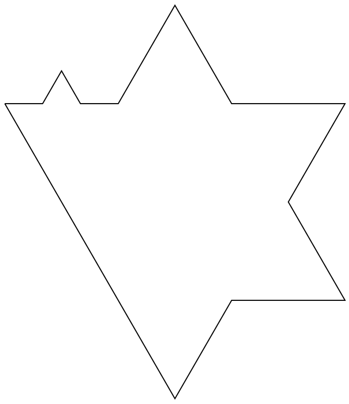
   (a) Igen. Induljunk ki egy szabályos háromszögből. Ennek egyik oldalát helyettesítsük az alábbi töröttvonallal (úgy, hogy a töröttvonal tüske alakú része kifelé álljon):

   Ennek a töröttvonalnak minden szakasza harmada az eredeti háromszög oldalának, és összesen hárommal növelte sokszögünk oldalszámát (egy oldalból lett négy), és a három újonnan keletkező szög rendre 240°, 60° és 240°. A lépést megfelelően sokszor ismételve tetszőleges hárommal osztható oldalszámot megkaphatunk, és ha a a kapott sokszögben a legrövidebb oldal hosszát egésznek választjuk, akkor minden oldala egész hosszúságú lesz. Mivel 2016 osztható 3-mal, a fent leírt módszerrel tudunk megfelelő 2016 oldalú sokszöget konstruálni.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Példa egy 12 oldalú sokszögre (háromféle oldalhosszúsággal):



(b) Nem. Legyen a darab 60°-os és b darab 240°-os szöge a sokszögnek. Ekkor $a + b = 2017$ és $a \cdot 60° + b \cdot 240° = 2015 \cdot 180°$, felhasználva, hogy egy n-csúcsú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$. 60-nal osztva: $a + 4b = 2015 \cdot 3$, ahonnan $a + b = 2017$-et felhasználva $2017 + 3b = 3 \cdot 2015$. Ez viszont nem lehetséges, mert az egyenlőség bal oldala nem osztható 3-mal, a jobb oldal viszont igen.

3. Ki lehet-e színezni a sík pontjait négy színnel úgy, hogy ne lehessen találni négy darab egyszínű pontot, melyek egy téglalap négy csúcsát alkotják?

Megoldás
Bárhogy is színezzük ki a sík pontjait, lesz egyszínű téglalap.

Tekintsünk a síkon egy 4×1024-es rácstéglalapot. Ebben a téglalapban minden vízszintes rácsegyenesen 5 rácspont van, így egy ilyen szakaszt $4^5 = 1024$ féle módon lehet kiszínezni. Mivel a téglalapunk 1025 darab ilyen 5 rácspontot tartalmazó vízszintes szakaszt tartalmaz, ezért a skatulyaelv alapján lesz kettő vízszintes szakasz, melyek azonos módon lesznek színezve. Mostantól csak ezt a két egyformán színezett szakaszt tekintjük. Mivel 5 pontból állnak, lesz rajtuk 2-2 egyformán színezett pont, és ezek ugyanabban a pozícióban is választhatók, hiszen egyformán van színezve a két szakasz. Az így kapott négy pont egy téglalapot alkot.

4. Egy 0-tól és 1-től különböző racionális számból kiindulva egy lépésben végrehajthatjuk a következő két művelet valamelyikét: vehetjük egy meglévő szám reciprokát, vagy egy meglévő számot kivonhatunk egyből. Ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg már nem jöhet ki új szám. A kiinduló szám értékétől függően hányféle számot kaphatunk ilyen módon? Az összes lehetőségre mutass példát!

Megoldás
A megoldás elején megjegyezzük, hogy semelyik lépés során nem kapunk 0-t vagy 1-et, mert 0-t

csak 1-ből, 1-et pedig 0-ból vagy 1-ből kaphatunk csak.

A megadott lépéseket kétszer megismételve az eredeti számot kapjuk vissza: $1-(1-x)=x$ és $1/(1/x)=x$ (ha $x \neq 0$). Ez azt jelenti, hogy a kétféle lépést csak felváltva érdemes végrehajtani. Az a számból az $1-x$ lépéssel indulva hat lépés után visszajutunk a-hoz:

$$\begin{tikzcd}
 & 1-a \arrow[r] & \frac{1}{1-a} \arrow[dr] & \\
a \arrow[ur] & & & \frac{a}{a-1} \arrow[dl] \\
 & \frac{1}{a} \arrow[ul] & 1-\frac{1}{a} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Vegyük észre, hogy ha az $1-x$ helyett az $1/x$ lépésel indítunk, ugyanezt a hatszöget kapjuk, csak az óramutató járásával ellentétes körüljárással.

Lássuk, mi történik, ha a 6 szám között vannak egyenlők. Mivel a kört bármelyik pontjából indíthatnánk, feltehetjük, hogy a egyenlő valamelyik másik számmal.

- Ha $a=\frac{1}{a}$, akkor $a=-1$ (mert az $a=1$ esetet kizártuk).
- Ha $a=1-a$, akkor $a=\frac{1}{2}$.
- Az $a=\frac{1}{1-a}$ egyenletnek nincs megoldása: átrendezve $a(1-a)=1$, tehát mindkét tényező pozitív, és ekkor mindkettő 0 és 1 között van, vagy mindkét tényező negatív, ami lehetetlen, mert az összegük 1.
- Az $a=1-\frac{1}{a}$ egyenletnek nincs megoldása: átrendezve $a+1/a=1$, de ha a pozitív, akkor a vagy $1/a$ legalább 1, ha a negatív, akkor $a+1/a$ is negatív.
- Ha $a=\frac{a}{a-1}$, akkor $a=2$ (mert az $a=0$ esetet kizártuk).

Azt figyelhetjük meg, hogy az egybeeső értékek esetei egyetlen „körben” helyezkednek el:

$$\begin{tikzcd}
 & -1 \arrow[r] & -1 \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & 2 \arrow[dl] \\
 & \frac{1}{2} \arrow[ul] & \frac{1}{2} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Itt tehát 3 különböző számot kapunk (a kiinduló számot is beleértve).

Minden más esetben a hat formula különböző értéket ad (és értelmezve van a kikötések miatt). Például:

$$3 \to -2 \to -\frac{1}{2} \to \frac{3}{2} \to \frac{2}{3} \to \frac{1}{3} \to 3$$

Tehát a kiinduló számtól függően három vagy hat különböző értéket kaphatunk, beleszámolva a kiinduló értéket is.

5. 16 csapat körmérkőzést játszik, mindenki mindenkivel pontosan egyszer találkozik. Minden mérkőzésen az egyik csapat nyer, a másik veszít, döntetlen nincsen.
Legfeljebb hány csapatnak lehet legalább 12 győzelme?

Megoldás

Legyen x darab ilyen csapat. Mivel ők egymás között $x(x-1)/2$ meccset játszottak, a többivel pedig $x(16-x)$ meccset, így összesen legfeljebb $x(x-1)/2 + x(16-x)$ győzelmet szerezhettek. Mivel mindegyikük legalább 12 győzelmet aratott, így

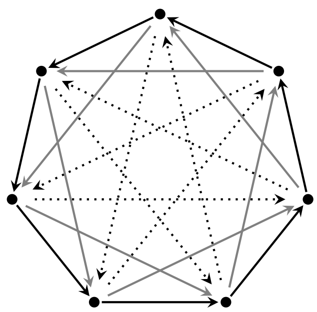
$$12x \leq x(x-1)/2 + x(16-x).$$

Átrendezve

$$0 \leq x\left(\frac{7}{2} - \frac{x}{2}\right),$$

ahonnan $x \leq 7$ jön ki.

$x = 7$-re megadható jó konstrukció: a 7 „kijelölt" csapat mindegyike verje meg a maradék 9 csapat mindegyikét, egymás között pedig három darab hét hosszú körbeveréssel mindenkinek lesz még 3 győzelme (lásd az ábrát, a nyíl a legyőzőtől mutat a legyőzöttre).



Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

---

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

1. megoldás
Mivel 12-vel növelünk, ezért minden lépésben 2-vel növekszik az egyesek helyén álló számjegy. Ha páros számmal kezdődik a sorozat, akkor csak egy elemű lehet, mert a 2 az egyetlen páros prím. Az utolsó számjegyek tehát az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból kerülnek ki. Ráadásul valahonnan kezdve, ebben a sorrendben fogják egymást ciklikusan követni.

Ha egy sorozat legalább 5 elemből áll, akkor szerepel benne az 5, mint utolsó számjegy. Ekkor a szám maga is csak 5 lehet, mert az az egyetlen 5-re végződő prím. Az 5 viszont csak az első elem lehet, hiszen a pozitívak a sorozat elemei és 12-vel növekszik. A leghosszabb sorozat tehát: $5, 17, 29, 41, 53$.

2. megoldás
Tegyük fel, hogy a sorozat legalább 5 tagból áll. Vegyük észre, hogy a p, $p + 12$, $p + 24$, $p + 36$ és $p + 48$ számok mind különböző maradékot adnak 5-tel osztva, mert a lehetséges különbségeik 12, 24, 36 vagy 48 nem oszthatók 5-tel. Mivel 5-ös maradékból 5-féle van, az egyikük osztható 5-tel. Ez csak $p = 5$ lehet, mert pozitív prímekről van szó.

Tehát a legalább 5 tagból álló sorozatnak így kell kezdődnie: $5, 17, 29, 41, 53$, ami mind prím, tehát 5 tagja lehet a sorozatnak. 6 tagja viszont nem lehet, mert a következő szám, a 65 nem prímszám.

2. Két játékos, A (aki a játékot kezdi) és B a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad.
Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható néggyel, B nyeri a játékot, egyébként pedig A. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát.
(Ha a játék végén 0 marad, akkor B nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

1. megoldás
Megmutatjuk, hogy B-nek van nyerő stratégiája.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot töröl, akkor B az 1-es törlésével eléri, hogy a szám 20-ra végződjön. Ha A az első lépésben 2-nél kisebbet töröl, akkor B a másik 2-nél kisebb jegy törlésével eléri, hogy a szám 32-re végződjön. Mindkét esetben B nyert.

Marad az az eset, hogy A elsőre a 2-est törli. Ekkor törölje B az 1-est, a megmaradó szám így 8765430.

Ha A most a 3-ast törli, B azonnal nyer. Ha 4-nél nagyobb számot töröl, akkor B a 3-as törlésével eléri, hogy a szám 40-re végződjön, ekkor is B nyer.

Tehát A csak a 4-est vagy 0-t törölheti. Törölje ekkor B a 3-ast, így a megmaradó szám $\overline{8765N}$, ahol $N = 0$ vagy $N = 4$.

Ha A 6-nál nagyobb számot töröl, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy a végződés $\overline{6N}$ legyen, ami 4-gyel osztható. Ha A az 5-öst törli, a végződés $\overline{6N}$, ekkor is B nyer. Ha A a 4-est törli, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy 76 legyen a végződés, ekkor is ő nyer.

Marad az az eset, hogy A a 6-ost törli, ekkor törölje B az 5-öst, megmarad $\overline{87N}$.

Ekkor bármit is lép A, az utolsó lépésben B meg tudja hagyni 8 és N közül valamelyiket, és mivel ez mindenképpen 4-gyel osztható szám, megnyeri a játékot.

2. megoldás

B számára egy lehetséges nyerő stratégia a következő: törölje sorra az 1, 3, 5, 7 számjegyeket. Ha ezek közül valamelyik már korábban törlődött, akkor helyette B tetszőleges másik jegyet törölhet. Megmutatjuk, hogy ilyen lépésekkel a játék során valamikor biztosan 4-gyel osztható számot kapunk.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot vagy 0-át törölt, akkor az 1-es törlése után a kapott szám 20-ra vagy 32-re végződik, tehát 4-gyel osztható. Ha A az 1-est törli, azonnal 4-gyel osztható számot kapunk. Marad az az eset, hogy A elsőként a 2-es jegyet törölte.

Három lépéspár után a megmaradó 3 jegy ekkor csak a 8, 7, 6, 4, 0 számok közül kerülhet ki. Ha a 7 és a 6 is megmaradt, akkor B nyert, hiszen a 876, 764, 760 számok mindegyike osztható 4-gyel. Ha a 7 már törlődött, akkor a szám végződése 64, 60 vagy 40, ekkor is 4-gyel osztható számot kaptunk. Ha a 7-es megmaradt, de a 6-os nem, akkor az utolsó lépéspár után csak a 8, 4, 0 számok valamelyike maradhat meg, ezek viszont 4-gyel oszthatók. Így B minden esetben megnyerte a játékot.

3. Egy 5×5-ös táblázat mezőibe beírtuk a pozitív egész számokat 1-től n-ig (mindegyiket egyszer), a kimaradó mezőkbe pedig nullákat írtunk. A kitöltést *érdekesnek* nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban egyenlő a beírt számok összege. Melyik a legkisebb pozitív egész n, melyre található *érdekes* kitöltés?

Megoldás

A beírt számok összege $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ osztható 5-tel, ez csak úgy lehet, ha n vagy $n+1$ 5-tel osztható. Ezek alapján a lehetséges n értékek és a hozzájuk tartozó S sorösszegek:

n	S
4	2
5	3
9	9
10	11
14	21
15	24
19	38
20	42
24	60
25	65

Az $n = 4$ és $n = 5$ eset nyilván nem lehetséges, mert van nagyobb beírt szám, mint a sorösszeg.

Az $n = 9$ és $n = 10$ szintén nem jó, mert az első esetben a 8-as sorába vagy oszlopába nem jut jó pár a 8 mellé, a második esetben pedig a 10-es sorába vagy oszlopába nem jut jó pár a 10 mellé.

Az $n = 14$ eset megvalósítható:

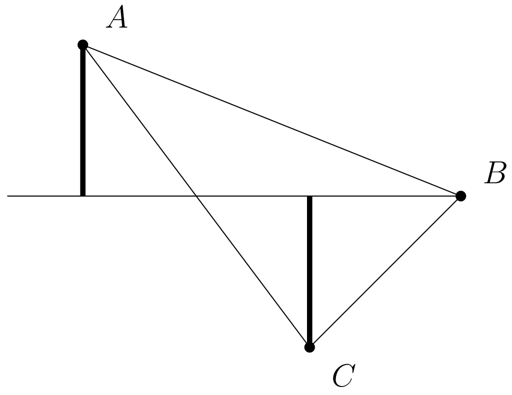
5	3	13		
6	1			14
	4	8	9	
	2		12	7
10	11			

4. Melyek azok az $ABCD$ négyszögek, melyek belsejében található olyan P pont, hogy a PA, PB, PC, PD szakaszok a négyszög belsejében haladnak, és az ABP, BCP, CDP és DAP háromszögek területe mind egyforma? Igyekezz minél egyszerűbb jellemzést adni!

Megoldás

Mivel $T_{ABP} = T_{BCP}$, ezért A és C egyenlő távolságra vannak a BP egyenestől (ez a távolság az ABP és BCP háromszögek BP-hez tartozó magassága). Ez kétféle módon lehetséges: AC párhuzamos BP-vel, vagy BP átmegy az AC szakasz felezőpontján. Mivel az első lehetőség nem áll fenn, így a BP egyenes átmegy az AC átló felezőpontján.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



Hasonló logikával a DP egyenes is átmegy az AC szakasz felezőpontján. Ez kétféleképpen lehetséges:

(a) P az AC szakasz felezőpontja.

(b) BP és DP egy egyenesre esik: a P pontot és az AC felezőpontját összekötő egyenesre.

Az (a) esetben AC belső átló kell hogy legyen. A $T_{PAB} = T_{DAP}$ feltételt is felhasználva következik, hogy az AC belső átló felezi a négyszög területét, és P ennek az átlónak a felezőpontja. Megfordítva: ha egy négyszög egyik átlója felezi a területét, akkor ennek az átlónak a felezőpontja jó P-nek, hiszen a súlyvonal felezi a háromszög területét.

A (b) esetben a BD átlóról derült ki, hogy felezi a négyszög területét, és P ezen átló felezőpontja kell, hogy legyen.

Tehát azok a jó négyszögek, amelyek egyik átlója felezi a négyszög területét. Egy ezzel egyenértékű leírás: a négyszög egyik átlója átmegy a másik átló felezőpontján.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő