



50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2021. május 29.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztá közlése, ha ezt a feladat szövegében külön jeleztük.

1. Kornél az $1, 2, 3, \dots, 21$ számok közül bekarikázott néhányat úgy, hogy ne legyen két szomszédos szám bekarikázva, de minden be nem karikázott számnak be legyen karikázva valamelyik szomszédja.

Hány számot karikázhatott be? Minden lehetséges értékre mutass példát!

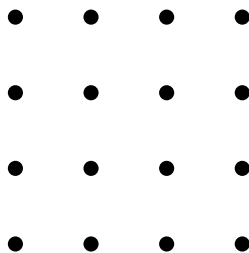
Nem kell bebizonyítani, hogy más érték nem lehet.

2. 10 ötödikes focizik, 5 az 5 ellen. Közülük öten járnak fociedzésre, öten nem. Ödön nem jár fociedzésre, de olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

3. Rajzold meg az összes olyan különböző négyszöget, amelynek csúcsai kiválaszthatóak az alábbi 4×4 -es pontrácsból úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból egy-egy csúcsot választunk ki.

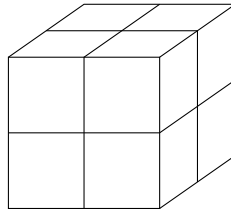
A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető négyszögeket nem tekintjük különbözőnek.

Nem kell bebizonyítani, hogy az általad talált négyszögeken kívül nincs más.



FOLYTATÁS A TÚLOLDALON!

4. Van 8 egységkockám, melyek mindegyike a következőképpen van kifestve: két lapja piros, két lapja kék és két lapja zöld, méghozzá úgy, hogy mindig a szemközti lapok azonos színűek. A 8 egységkockából összeépítettem egy $2 \times 2 \times 2$ -es kockát. A nagy kockát letettem az asztalra, így most három (páronként szomszédos) lapját látom. Ezeken összesen 5 piros, 4 kék és 3 zöld kiskockalap látszik. Hány piros kiskockalap lehet látható a másik három lapon összesen?



5. Egy iskola fekvőtámaszversenyt rendez. Az első fordulóban 8 gyerek áll fel egy körben. Minden fordulóban 1 perc alatt kell minél több fekvőtámaszt megcsinálni. Aki mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt csinál, annak a forduló végén ki kell állnia a körből. Viszont ha egy forduló végén két szomszédos gyerek egyikének sem kell kiállnia a körből, akkor a két gyerek közé egy újabb gyereket állítanak.
- a) Hány gyerek állhat a körben a második fordulóban? Minden lehetséges esetre mutass példát, azaz add meg, hogy az első fordulóban hány fekvőtámaszt csinált a nyolc gyerek!
Azt nem kell indokolni, hogy más eset nem lehetséges.
- b) Tudjuk, hogy a verseny egyik fordulójában 20 gyerek állt a körben. Lehetséges-e, hogy a rákövetkező fordulóban 36-an állnak majd a körben?