



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

ORSZÁGOS DÖNTŐ, 1. forduló

ÖTÖDIK OSZTÁLY- MEGOLDÁSVÁZLATOK

1. 1. Egy osztási műveletben az osztandó és az osztó összege 2289. A hányados 17, a maradék 111. Határozd meg az osztandót és az osztót!

Megoldás:

A megoldás során az "osztandó = hányados \times osztó + maradék" összefüggést fogjuk felhasználni. Vonjuk le a maradékot a 2289-ből, az eredmény 2178 lesz. Mivel a hányados 17, ezért az osztandó 17-szerese az osztónak. Osszuk a 2178-at 18 egyenlő részre, megkapjuk az osztót, ami 121 lesz, majd ezt szorozzuk 17-tel, az eredmény 2057, majd adjuk ehhez a maradékot: $2057 + 111 = 2168$. Tehát 2168 az osztandó.

Ellenőrzés: az osztó és az osztandó összege $2168 + 121 = 2289$.

S valóban $2168 = 121 \cdot 17 + 111$.

2. Domi néhány gyümölcs súlyát hasonlította össze egy mérlegen. 2 alma egyensúlyt tartott 3 körtével, 1 barack pedig 3 szilvával. Ha az egyik serpenyőbe egy fél dinnyét, a másikba 15 körtét, 4 almát és 6 szilvát tett, akkor a mérleg egyensúlyban volt. Ehhez hasonlóan egy egész dinnye 40 barackkal és 10 almával tartott egyensúlyt. Hány barack súlya egyezett meg 3 körte súlyával? (Feltételezzük, hogy az egynemű gyümölcsök darabonkénti súlya egyenlő)

Megoldás:

Ha fél dinnye = 15 körte + 4 alma + 6 szilva, akkor 1 dinnye = 30 körte + 8 alma + 12 szilva.

Ha 2 alma = 3 körte, akkor 8 alma = 12 körte, továbbá 10 alma = 15 körte.

Ha 1 barack = 3 szilva, akkor 4 barack = 12 szilva.

Így 1 dinnye = 30 körte + 12 körte + 4 barack = 42 körte + 4 barack.

Mivel 1 dinnye = 40 barack + 10 alma = 40 barack + 15 körte, ezért 42 körte + 4 barack = 40 barack + 15 körte.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Ebből azt látjuk, hogy 27 körte = 36 barack, amiből következik, hogy 3 körte = 4 barack.
A válasz: 4 barack súlya egyezik meg 3 körte súlyával.

Megjegyzés: Az egyes gyümölcsök súlyának aránya:
szilva : barack : körte : alma : dinnye = 1 : 3 : 4 : 6 : 180.

3. Nemrég Bécsbe utaztam és egy laptopot vásároltam. A zsebemben csak 2 és 5 eurós érmék voltak, mindegyikből 300 darab. Arra jöttem rá, hogy az ára 50-féleképpen fizethető ki ezen érmékkel, de csak 2 euróssal nem tudtam volna kifizetni. Mennyibe kerülhetett a laptop?

Megoldás:

Két lehetőség fordulhat elő: a laptop ára egy páratlan szám volt vagy drágább, mint amit ki lehet fizetni az összes két euróssal.

I.eset:

A laptop ára egy páratlan szám volt, különben 2 euróssal ki tudtam volna fizetni.

Vegyük észre, hogy a fizetésnél használt 5 eurósok száma páratlan kell legyen. Ez már mindent meghatároz. Legyen a fizetendő összeg S , ebből vonjunk le $(2n-1) \cdot 5$ eurót. Az eredmény páros lesz, s fele ennyi 2 euróra van szükség a fizetésnél. A kifizetések valójában csak abban különböznek egymástól, hogy valahányszor 2 darab ötöst kettesekre váltunk, vagy ennek fordítottját végezzük el.

Tehát az S értéke valamint az ötösök száma egyértelműen meghatározza a kettesek számát. Az ötvenedik páratlan szám a 99. $99 \cdot 5 = 495$ euró is lehetett a laptop ára, de lehet, hogy 497, 499, 501 vagy 503. Öt megoldás is van.

A 495 euró kifizetése így alakul: 1. lehetőség 1 db 5-ös és 245 db 2-es .

2. lehetőség 3 db 5-ös és 240 db 2-es,

3. lehetőség 5 db 5-ös és 235 db 2-es,

...

49. lehetőség 97 db 5-ös és 5 db 2-es,

50. lehetőség 99 db 5-ös és 0 db 2-es.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

A 497-et, 499-et, 501-et, 503-at hasonlóan fizetjük ki, csak ott 1, 2, 3 illetve 4 darab 2 euróssal többet adunk.

II.eset:

Ha 300×2 eurónál, azaz 600 eurónál drágább a laptop, akkor a következő esetek fordulhatnak elő:

$$1610 \text{ euró} = 300 \times 2 + 202 \times 5 = 295 \times 2 + 204 \times 5 = \dots = 55 \times 2 + 300 \times 5$$

vagy

$$1608 \text{ euró} = 299 \times 2 + 202 \times 5 = \dots = 54 \times 2 + 300 \times 5$$

vagy

$$1606 \text{ euró} = 298 \times 2 + 202 \times 5 = \dots = 53 \times 2 + 300 \times 5$$

vagy

$$1604 \text{ euró} = 297 \times 2 + 202 \times 5 = \dots = 52 \times 2 + 300 \times 5$$

vagy

$$1602 \text{ euró} = 296 \times 2 + 202 \times 5 = \dots = 51 \times 2 + 300 \times 5$$

vagy

$$1605 \text{ euró} = 300 \times 2 + 201 \times 5 = 295 \times 2 + 203 \times 5 = \dots = 55 \times 2 + 299 \times 5$$

vagy

$$1603$$

vagy

$$1601$$

vagy

$$1599$$

vagy

$$1597 \text{ euró} = 296 \times 2 + 201 \times 5 = \dots = 51 \times 2 + 299 \times 5$$



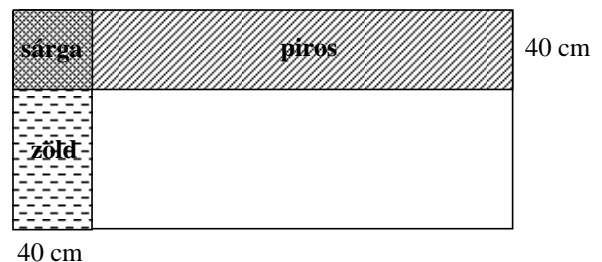
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

4. Egy téglalap alakú fehér vásznat a felső (hosszabb) szélé mentén egy 40 cm-es sávban piros színű fényel, a bal szélén szintén egy 40 cm-es sávban zöld színű fényel világították meg. Ettől a vászon bal felső sarka egy négyzet alakban sárga színűnek látszott. Négyyszer akkora terület maradt fehér, mint amekkora zöld színű lett és a sárga rész mindössze hatoda a fehér területnek. Hány deciméter hosszúak a vászon oldalai?



Megoldás

A sárga rész területe $40 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 1600 \text{ cm}^2 = 16 \text{ dm}^2$.

Ebből a fehér rész területe: $6 \cdot 16 \text{ dm}^2 = 96 \text{ dm}^2$.

A zöld rész területe: $96 \text{ dm}^2 : 4 = 24 \text{ dm}^2$.

A zöld rész ismeretlen oldala $24 \text{ dm}^2 : 4 \text{ dm} = 6 \text{ dm}$, így a vászon rövidebb oldala $6 \text{ dm} + 4 \text{ dm} = 10 \text{ dm}$.

A fehér rész területe 4-szerese a zöldének és egyik oldaluk közös, ezért a fehér rész hosszabb oldala $4 \cdot 4 \text{ dm} = 16 \text{ dm}$ és így a vászon hosszabb oldala $4 \text{ dm} + 16 \text{ dm} = 20 \text{ dm}$. Tehát a vászon oldalainak hossza 10 dm és 20 dm.

5. Mennyi a négyjegyű palindrom számok összege? (Egy egész szám palindrom, ha visszafelé olvasva önmagát kapjuk, pl. 3443, 2002, stb.)

1. megoldás:

Egy négyjegyű palindrom számot egyértelműen meghatározza az első két jegye. Az első számjegy kilencféle, a második tízféle lehet, tehát $9 \cdot 10 = 90$ négyjegyű palindrom szám van. Az összegüket megkapjuk, ha minden egyes számjegyre megvizsgáljuk, hogy hányadik helyi értéken hányszor szerepel.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Összegezzük az ezresek és az egyesek helyén álló értékeket! Ha az ezresek helyén 1-es van, akkor az egyesek helyén is, de a két középső jegy azonos és tízféleképpen választható meg. Ezek összege $10 \cdot (1000 + 1) = 10010$. Hasonlóan a többi

$$10 \cdot (2000 + 2) = 20020, 10 \cdot (3000 + 3) = 30030, \dots 10 \cdot (9000 + 9) = 90090.$$

Összegezve $10 \cdot 1001 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 10010 \cdot 45 = 450450$.

Most összegezzük a százások és a tízesek helyi értékén lévő számokat! Ha itt 1-es áll, akkor egyszeri előfordulása 110-et ér, de az ezresek helyén lévő jegy 9-féle lehet, tehát szoroznunk kell 9-cel. Az összegzés így alakul: $9 \cdot (110 + 220 + 330 + \dots + 990) = 9 \cdot 4950 = 44550$

Az eredmény $450450 + 44550 = 495000$.

2. megoldás:

A négyjegyű palindrom számok \overline{abba} alakúak. Az első megoldásban leírtak alapján 90 darab van.

Összegezzük először $\overline{1bb1} = 1001 + 110 \cdot b$ alakúakat. Itt a b értéke 0-tól 9-ig mindenféle számjegy lehet, tehát 10-féle.

$$\text{Az összeg } 1001 \cdot 10 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 10010 + 110 \cdot 45 = 14960.$$

Összegezzük másodjára a $\overline{2bb2} = 2002 + 110 \cdot b$ alakúakat. Az előzőhöz hasonlóan összegezve az összeg $2002 \cdot 10 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 20020 + 110 \cdot 45 = 24970$.

Összegezzük végül a $\overline{9bb9} = 9009 + 110 \cdot b$ alakúakat. Az előzőhöz hasonlóan összegezve az összeg $9009 \cdot 10 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 90090 + 110 \cdot 45 = 95040$.

A most kapott 9 értéket is összegezzük:

$$10010 + 20020 + \dots + 90090 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \cdot 9 = \text{Kiemelések után}$$

$$10 \cdot 1001 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \cdot 9 = 450450 + 44550 = 495000$$