TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Van 10 különböző számkártyánk 0-tól 9-ig. 5 gyerek (Anna, Bea, Cili, Dóra, Enikő) mindegyike húz két-két kártyát, majd összeilleszti egy-egy kétjegyű számmá. Ezután a következő igaz mondatok hangzanak el:

   Anna: Az én számom osztható 26-tal.
   Bea: Az én számom osztható 20-szal.
   Cili: Az én számom osztható 16-tal.
   Dóra: Az én számom osztható 28-cal.

   Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható: (a) 12-vel (b) 13-mal?

   Megoldás

   Ha Enikő száma osztható lenne 12-vel, akkor mind az öt kétjegyű szám páros lenne, tehát páros számjegyre végződne. (***2** pont*)
   Mivel csak 5 páros számkártya van, a tízesek helyén mindenütt páratlan számnak kell állnia. Ekkor viszont Bea száma nem lehetne osztható 20-szal. (***2** pont*)
   Az viszont lehetséges, hogy Enikő száma osztható legyen 13-mal. Legyen Anna száma $78 = 3 \cdot 26$, Beáé $40 = 2 \cdot 20$, Cilié $32 = 2 \cdot 16$, Dóráé $56 = 2 \cdot 28$ és Enikőé $91 = 7 \cdot 13$. Ekkor minden számjegyet pontosan egyszer használtunk fel. (***3** pont*)

   Összesen: 7 pont

2. Töltsd ki az ábrán látható kilenc mezőt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok mindegyikének egyszeri felhasználásával úgy, hogy a sorokban és az oszlopokban is a megadott eredményt adják a műveletsorok! Írd le azt is, hogyan határoztad meg a számokat!

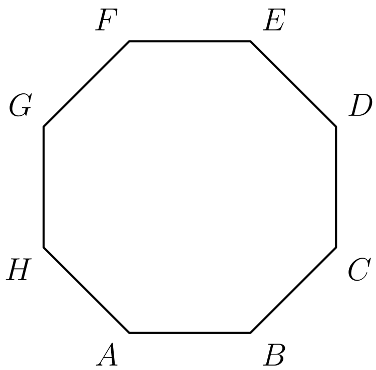
$$
\begin{array}{ccccccccc}
\Big(& \square & \times & \square & \Big) & / & \square & = & 2 \\
 & - & & \times & & & + & & \\
\Big(& \square & + & \square & \Big) & / & \square & = & 1 \\
 & + & & \times & & & + & & \\
\Big(& \square & - & \square & \Big) & \times & \square & = & 21 \\
 & = & & = & & & = & & \\
 & 8 & & 48 & & & 22 & &
\end{array}
$$

Megoldás

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\Big(& \boxed{\mathbf{4}} & \times & \boxed{\mathbf{3}} & \Big) & / & \boxed{\mathbf{6}} & = & 2 \\
 & - & & \times & & & + & & \\
\Big(& \boxed{\mathbf{1}} & + & \boxed{\mathbf{8}} & \Big) & / & \boxed{\mathbf{9}} & = & 1 \\
 & + & & \times & & & + & & \\
\Big(& \boxed{\mathbf{5}} & - & \boxed{\mathbf{2}} & \Big) & \times & \boxed{\mathbf{7}} & = & 21 \\
 & = & & = & & & = & & \\
 & 8 & & 48 & & & 22 & &
\end{array}
$$

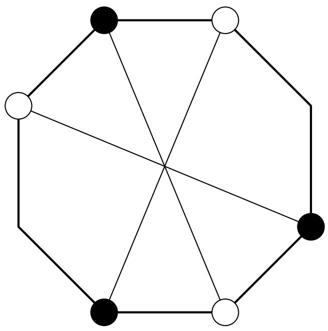
A jobb alsó mezőbe $3 \cdot 7 = 21$ miatt 3 vagy 7 kerülhet, de a 3 kevés, mert akkor fölötte 19-et kellene két számjegy összegeként megkapni, ami lehetetlen. Tehát jobb alulra a 7 kerül. Fölötte az összeg 15, ami csak $9+6$ alakban állhat elő. A 9 nem lehet legfelül, mert mellette az első két szám szorzata csak úgy lehetne 18, hogy $3 \cdot 6$, de a 6 már foglalt az utolsó oszlopban. Tehát jobb felül van a 6, alatta a 9. Az alsó sor zárójelében a különbség értéke 3. Ez lehet $8-5$, $5-2$ vagy $4-1$. Az utolsó eset kiesik, mert akkor középen két szám szorzata lenne $48 = 6 \cdot 8$, de a 6 már foglalt. Az első eset is kiesik, mert 48 nem osztható 5-tel. A bal alsó és középső alsó mezőkre így marad az 5 és a 2. A középső sorban 9 kell a zárójelben, ez pedig már csak $1+8$ alakban áll elő és a 8 van középen, különben nem jöhetne ki 48 a középső oszlop szorzatára. Innen már egyértelmű a befejezés. **Összesen: 7 pont**

3. Az ábrán látható szabályos nyolcszög csúcsai közül szeretnénk kiválasztani hármat úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen szomszédos, és semelyik kettő ne legyen átellenes. Hány különböző kiválasztás lehetséges? (Két kiválasztás különböző, ha van olyan csúcs, ami az egyikben szerepel, de a másikban nem.)



Megoldás

Nevezzük átmérőnek a nyolcszög leghosszabb átlóit. A feltételek miatt a kiválasztott pontok csak különböző átmérők végpontjai lehetnek. Ezért két lépésben végezzük a kiválasztást: először három átmérőt választunk, utána pedig minden átmérő valamelyik végpontját. (***2** pont*)
A négy átmérő közül hármat négyféle módon választhatunk (aszerint, hogy melyik marad ki) és ezek mindig „szomszédosak”, a következő ábrán látható értelemben. (***2** pont*)
A három kiválasztott átmérő végpontjait csak kétféle módon választhatjuk (az ábrán vagy a teli vagy az üres körök jók). (***2** pont*)



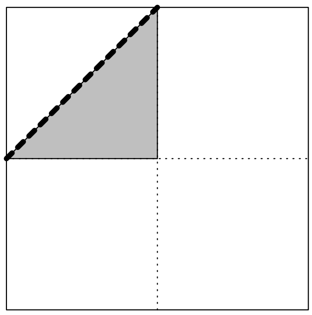
Tehát összesen $4 \cdot 2 = 8$ lehetőség van. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Adott egy négyzet. Dorina beszínezte a négyzet síkjában azokat a pontokat, amelyek távolsága a négyzet középpontjától legfeljebb akkora, mint a távolsága a négyzet legközelebbi csúcsától. Hányad része a Dorina által beszínezett terület a négyzet területének?

Megoldás

A négyzet szemközti oldalfelező pontjait összekötő szimmetriatengelyek négy negyedre vágják a négyzet síkját. Egy-egy ilyen részbe egy négyzet-csúcs esik és a sík-rész pontjai ehhez a négyzet-csúcshoz vannak legközelebb. (***2** pont*)
Ha egy ilyen negyedet nézünk, akkor az eredeti négyzet középpontjához közelebb eső pontok a szaggatott átlótól a négyzet középpontja felé eső pontok.



(***2** pont*)

Mind a négy negyedre elmondva ezt az érvelést, éppen a az eredeti négyzet felét fedik le a feladat feltételének megfelelő pontok. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.