TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Anita, Viola, Szilárd és Dénes 4 különböző emeleten laknak egy 10 emeletes épületben: mindegyikük a 7., 8., 9., 10. emeletek valamelyikén. Amikor kérdeztem őket, ki melyiken lakik, Dénes válasz nélkül elfutott, a többiek pedig kicsit megtréfáltak. Ezeket állították:

   Anita: „Én a hetediken, Dénes a nyolcadikon."
   Viola: „Én a kilencediken, Anita a nyolcadikon."
   Szilárd: „Én a nyolcadikon, Viola a tizediken."

   Rémült arcomat látva nevetgélve hozzátették, mindegyiküknek pontosan az egyik kijelentése igaz. Vajon ki melyik emeleten lakik?

   Megoldás

   Ha Anita első állítása igaz, akkor ő a hetediken lakik. Így Viola második kijelentése hamis, tehát az első igaz, így Viola a a kilencediken lakik. Ekkor Szilárd második kijelentése hamis, tehát csak az első lehet igaz, így ő a nyolcadikon lakik. Mivel mind különböző emeleten laknak, Dénes csak a tizediken lakhat. Ellenőrizhető, hogy ekkor mindenkinek az első kijelentése igaz, a második hamis. (***4** pont*)
   Ha Anita első állítása hamis, akkor a második igaz, tehát Dénes a nyolcadikon lakik. Ekkor viszont Szilárd nem lakhat a nyolcadikon, tehát csak a második állítása lehet igaz, így Viola a tizediken lakik. Ekkor viszont Violának nem igaz az első kijelentése, tehát a másodiknak igaznak kell lennie, azaz Anita a nyolcadikon lakik. Ez viszont ellentmondás, mivel Dénes és Anita nem lakhatnak mindketten a nyolcadikon. Tehát az egyetlen lehetőség, hogy Anita a 7., Viola a 9., Szilárd a 8., Dénes a 10. emeleten lakik. (***3** pont*)

   Összesen: 7 pont

2. Van egy piros és egy zöld korongunk. A piros korong egyik oldalára a 2000 számot írtuk. A piros korong másik oldalára, és a zöld korong mindkét oldalára írhatunk egy-egy pozitív egész számot. Az a célunk, hogy a korongokat különböző oldalukkal az asztallapra helyezve, a felül látható két számot összeadva kaphassunk 2016-ot, 2017-et, 2018-at, illetve 2019-et is.

   Milyen számokat írhatunk a korongok oldalaira? Adj meg minél több lehetőséget, és igazold, hogy a kívánt összegek megkaphatók! (Nincs szükség annak indoklására, hogy az általad felírt lehetőségeken kívül nincs több.)

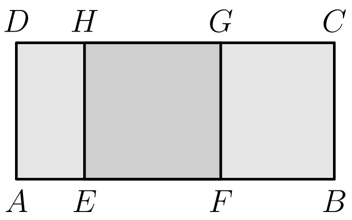
Megoldás
Négy lehetőség van:

	Piros korong	Zöld korong	2016	2017	2018	2019
1.	1998, 2000	18, 19	1998 + 18	1998 + 19	2000 + 18	2000 + 19
2.	1999, 2000	17, 19	1999 + 17	2000 + 17	1999 + 19	2000 + 19
3.	2000, 2001	16, 18	2000 + 16	2001 + 16	2000 + 18	2001 + 18
4.	2000, 2002	16, 17	2000 + 16	2000 + 17	2002 + 16	2002 + 17

Összesen: 7 pont

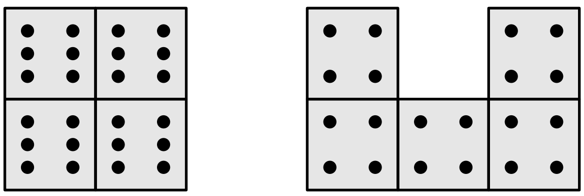
A fentiek közül 1 jó lehetőség megadásáért **1 pont**, 2 jó lehetőségért **3 pont**, 3 jó lehetőségért **5 pont**, mind a 4 megadásáért **7 pont** jár.

3. Az $ABCD$ téglalap AB oldalán felvettük az E és F pontokat, CD oldalán pedig a G és H pontokat az ábra szerint. Tudjuk, hogy $EFGH$ négyszög egy négyzet, valamint azt, hogy az AF szakasz 63 cm, a CH szakasz 77 cm hosszú. Mennyi az $ABCD$ téglalap kerülete?



Megoldás
Mivel $CH = BE$, ezért $140 = 63 + 77 = AF + EB = AB + EF$ éppen a négyzet oldalával több, mint a téglalap AB oldala. De a négyzet oldala egyenlő a téglalap AD oldalával. Ezért $2 \cdot 140 = 280$ éppen a keresett kerület. **Összesen: 7 pont**

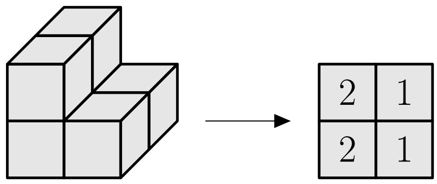
4. Tökéletesen egyforma szabályos dobókockákból építettünk egy nem feltétlen összefüggő építményt. (A szabályos dobókockán a szemközti lapokon mindig összesen 7 pötty van.) Az ábra mutatja, hogy mit látunk belőle oldalról, illetve elölről nézve.



Építményünk oldalról *Építményünk elölről*

Tudjuk azt is, hogy az építmény a lehető legkevesebb kocka felhasználásával építettük meg.

(a) Adj meg egy lehetséges alaprajzot, és írd bele a mezőkbe, hogy ott hány kocka van egymáson, hasonlóan az alábbi ábrához!



Egy másik építmény és a hozzá tartozó alaprajz

(b) A lehető legkevesebb dobókockából elkészített építményünk üvegasztalon áll. Alulról, felülről, elölről, hátulról, bal oldalról és jobb oldalról nézve egyaránt igaz, hogy az éppen látható lapok mindegyikén ugyanannyi pötty van. Hány pötty látható ebből a 6 irányból összesen?

Megoldás

Az elölnézeten látható öt négyzet öt különböző kockához tartozik, ezért legalább öt a kockák száma. Ennyi lehet is, például ezekkel az alaprajzokkal:

2	0
0	1
0	2

2	0
1	0
0	2

0	2
1	0
2	0

0	2
0	1
2	0

Bármelyik helyes alaprajz megadása: **2 pont**.

Elölről mind az 5 kocka látszik, ezért hátulról nézve is mind az 5-nek látszania kell. Mivel a szemközti lapokon összesen 7 pötty van, elölről és hátulról összesen 35 pöttyöt látunk. (***1** pont*)
Bal és jobb oldalról egyaránt 4 kocka látszik. Legalább 3 kocka mindkét irányból látszik (hiszen összesen csak 5 kocka van), és mivel az egyik oldalon csupa 6-os van, a másikon csupa 1-esnek kell lennie. Ez összesen $4 \cdot 7 = 28$ pötty. (***1** pont*)
Az elölnézeten minden kockát látunk, így egyértelmű, hogy alulról és felülről nézve egyaránt 3 kocka látszik, és van egy olyan, ami alulról és felülről is látható. Emiatt az egyik irányból csupa 2-est, a másikból csupa 5-öst kell látnunk, ez így $3 \cdot 7 = 21$ pötty. (***2** pont*)
Összesen tehát $35 + 28 + 21 = 84$ pötty látható a hat irányból. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

5. Egy 4×4-es táblázatot az itt látható módon kitöltöttünk számokkal. A táblázat bal felső sarkából indulva lépkedhetünk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

9	10	4	8
12	6	16	2
5	7	1	14
15	13	11	3

- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
- egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
- a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.

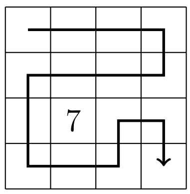
Legfeljebb mennyi lehet a séta során bejárt mezőkre írt számok összege?

1. megoldás

Ha a táblázatot sakktáblaszerűen színezzük, akkor a séta első és utolsó mezője azonos színű. Mivel a séta során felváltva lépünk világos és sötét mezőkre, ezért a séta eggyel többet érint a kiindulóval azonos színű mezőkből. Emiatt legalább egy kimarad a másik színű mezőkből. (***3*** *pont*)

Ezek közül a legkisebb értékű a 7-es. Ezért a lehetséges összegek mindegyike legalább 7-tel kevesebb az összes szám összegénél. (***1*** *pont*)

Az, hogy az összes szám összegéből csak 7-et veszítsünk, el is érhető, például így:



(***2*** *pont*)

A bejárt mezőkre írt számok összege $1 + 2 + \ldots + 16 - 7 = \frac{16 \cdot 17}{2} - 7 = 136 - 7 = 129.$ (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Azt állítjuk, a lehető legnagyobb összeg a 129. Ezzel az összeggel egy lehetséges bejárást mutat az előző megoldásban szereplő ábra. (***3*** *pont*)

Ha létezik ennél nagyobb összegű bejárás, akkor abban a kihagyott mezők összértéke legfeljebb 6 lehet. Vagyis a 7, 8, …, 16 értékű mezők mindegyikére rá kell lépnünk, és természetesen a 3-asra is. (***1*** *pont*)

Ahhoz, hogy a 15-ösön át tudjunk haladni, rá kell lépni az 5-ösre is. Ahhoz, hogy a 8-ason át tudjunk haladni, rá kell lépni a 4-esre és a 2-esre is. (***1*** *pont*)

Ahhoz, hogy a 10-esre és a 12-esre is rá tudjunk lépni, nem hagyható ki a 6-os mező. Hasonlóan, a 11 és a 14 érintése miatt nem hagyható ki az 1-es sem. (***1*** *pont*)

Tehát csak úgy lehetne nagyobb összeget kapni, ha az összes mezőn áthaladnánk. Ilyen séta azonban nincs, hiszen a 9-estől a 3-asig csak páros számú lépéssel mehetünk, az összes mező egyszeri bejárásához azonban 15 lépést kellene tenni. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Tehetség Program · Emberi Erőforrások Minisztériuma · Emberi Erőforrás Támogatáskezelő · nka Nemzeti Kulturális Alap