TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2019. május 25.

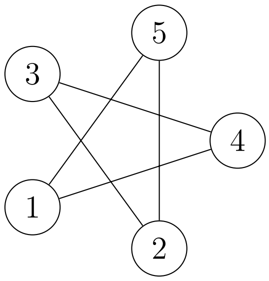
ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy öttagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy olyan kerekasztal köré ültetik le őket, ahol a székek egytől ötig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége. A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Hogyan rakja le a pincér a székeket a lehető legnagyobb számla elérése érdekében?

1. megoldás

Az ábrán összekötöttük azokat a székeket, amelyek sorszámának különbsége szerepet játszik a számla összegében.



A fenti példában $1000 \cdot ((5-1)+(4-1)+(4-3)+(3-2)+(5-2)) = 1000 \cdot 12 = 12000$ forint a végösszeg. (***2** pont*)
Megmutatjuk, hogy az elérhető legnagyobb összeg.

Látható, hogy minden sorszám pontosan két különbségben fog szerepelni, a kérdés csak az, hogy milyen előjellel. (***2** pont*)
Az ezres szorzóval nem foglalkozunk, csak a második tényezővel, ami átrendezhető így:

$$5+5+4+4+3-3-2-2-1-1$$

Mivel minden szám kétszer fog szerepelni, az a legnagyobb elérhető összeg, amikor a legnagyobb számok pozitív, a legkisebb számok negatív előjellel szerepelnek, és a fenti esetben ez teljesül. (***3** pont*)
Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

A fenti ábrán látható egy megoldás 12000-re. (***2** pont*)
Paritások miatt meggondolható, hogy a 13000 nem lehetséges. (***1** pont*)
Azt fogjuk belátni, hogy 14-re se lehetséges: 4000-nél többet nem fog fizetni senki 4000 forintot legfeljebb 1 ember fizethet: (aki az 1-5 közt van). (***1** pont*)
3000 forintot legfeljebb 2 ember fizethet: (aki az 1-4 és 2-5 közt van). (***1** pont*)
Vagyis a maximálisan elérhető összeg $4000 + 3000 + 3000 + 2000 + 2000 = 14000$. (***1** pont*)
Ehhez viszont az kéne, hogy egy távolságra legyenek az $1-5$, $1-4$, $2-5$ párok, de ez csak akkor lehet, ha a székek az $1-3-5-4-2$ sorrendben vannak, de ekkor csak 12000 forint lesz az összeg. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. Egy szabaduló szoba utolsó feladványához értél, egy számzáras lakat van az ajtón. Három számjegyet kell megfejtened, ezek mindegyike 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 valamelyike lehet. Háromjegyű számokkal kérdezhettél rá, de csak négyszer. Ezekre meg is kaptad a választ:

	Kérdezett szám	Ennyi számjegyet eltaláltál	Közülük ennyi van jó helyen
1.	245	0	0
2.	760	2	0
3.	806	1	0
4.	037	2	0

Melyik szám nyitja a lakatot?

Megoldás

Az utolsó három kérdésre adott válaszból látható, hogy a nulla nem szerepel a kódban, mert egyik lehetséges pozíción sem állt jó helyen. (***2** pont*)

Emiatt a második és a negyedik kérdésben a hét és hat, illetve a három és a hét a jó jegy, csak rossz helyen. (***2** pont*)

Tehát a hetes csak középen lehet, és mivel a harmadik kérdésre kapott válasz miatt a hat nem a kód végén van, ezért az egyetlen lehetséges kód a 673. Ez megfelel az első kérdésre kapott válasznak is. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Egy téglalap egyik oldalát csökkentettük 24 cm-rel, a másikat viszont a háromszorosára növeltük. Így egy olyan négyzetet kaptunk, melynek területe egyenlő az eredeti téglalap területével. Mekkora a keletkezett négyzet oldala?

Megoldás

Ha az eredeti oldalak hosszát a és b jelöli, akkor a keletkezett négyzet oldalai $a - 24 = 3b$. (***2*** *pont*)

Mivel a négyzet területe egyenlő a téglalap területével, és egyik oldala háromszorosa a téglalap egyik oldalának, ezért a négyzet másik oldalának harmad akkorának kell lennie, mint a téglalap másik oldala: $a - 24 = \frac{a}{3}$. Tehát a 24 pont kétharmada a-nak. (***2*** *pont*)
Innen $a = 36$ és $b = 4$ adódik, a közös terület pedig $T = 36 \cdot 4 = 144$. (***2*** *pont*)
Ellenőrizhetjük, hogy $a - 24 = 3b = 12$ és $12 \cdot 12 = 144$, a feladat feltételei teljesülnek. (***1*** *pont*)
Más egyenletrendszerből is kijöhet a helyes eredmény. **Összesen: 7 pont**

4. Péter pénztárcájában 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintosok vannak. Tudjuk, hogy mindegyik pénzérme fajtából különböző számú van, illetve tudjuk, hogy 5 forintos érméből kétszer annyi van, mint 200 forintosból, 100 forintos érméből kétszer annyi van, mint 10 forintosból, valamint 50 forintos érméből nyolcszor annyi van, mint 20 forintosból. Mennyi pénze lehet legfeljebb Péternek, ha kevesebb, mint 2000 forintja van?

Megoldás

Jelölje a, b és c a 10, 20 és 200 forintos érmék darabszámát. Ekkor az 100, 50 és 5 forintos érmék száma $2a$, $8b$ és $2c$, így az érmék összesített értéke

$$(10 \cdot a + 100 \cdot 2a) + (20 \cdot b + 50 \cdot 8b) + (200 \cdot c + 5 \cdot 2c) = 210a + 420b + 210c = 210 \cdot (a + 2b + c)$$

(***1*** *pont*)
Mivel $420 = 2 \cdot 210$, ezért Péternek 210-zel osztható forintja van. (***2*** *pont*)
A legnagyobb 210-zel osztható 2000-nél kisebb szám az $1890 (= 9 \cdot 210)$. (***1*** *pont*)
Mutatunk egy példát arra, hogy ez elérhető.

$a + 2b + c = 9$, aminek egy megoldása $a = 2, b = 1, c = 5$ (a másik megoldás az $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$). Ezekkel az értékekkel az eredeti feladat helyes megoldását kapjuk:

Érme	5	10	20	50	100	200	Összeg
darab betűvel	$2c$	a	b	$8b$	$2a$	c	
darabszám	10	2	1	8	4	5	
érték	50	20	20	400	400	1000	1890

(***3*** *pont*)
Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.