TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2021. május 29.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Kornél az $1, 2, 3, \ldots, 21$ számok közül bekarikázott néhányat úgy, hogy ne legyen két szomszédos szám bekarikázva, de minden be nem karikázott számnak be legyen karikázva valamelyik szomszédja.

Hány számot karikázhatott be? Minden lehetséges értékre mutass példát!
Nem kell bebizonyítani, hogy más érték nem lehet.

Megoldás. Kornél 7, 8, 9, 10 vagy 11 számot karikázhatott be. Példák:

- 7 karikázott szám: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
- 8 karikázott szám: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
- 9 karikázott szám: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
- 10 karikázott szám: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
- 11 karikázott szám: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Megjegyzés. Bármely három szomszédos szám közül valamelyiket be kell karikázni, különben a középső (karikázatlan) számnak nem lenne karikázott szomszédja. Ezért nem lehet 7-nél kevesebb karikázott szám. Mivel bármely két szomszédos szám közül legfeljebb egy lehet karikázott, ezért 11-nél több karikázott szám sem lehet.

2. 10 ötödikes focizik, 5 az 5 ellen. Közülük öten járnak fociedzésre, öten nem. Ödön nem jár fociedzésre, de olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

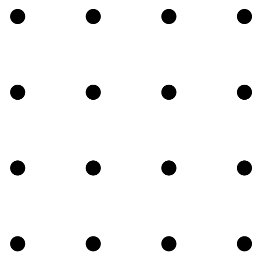
Megoldás. Ödönnek vagy négy edzésre járó, vagy három edzésre járó és egy edzésre nem járó csapattársra van szüksége. Az első esetben ötféleképpen oszthatjuk el az edzésre járókat (egyvalaki kerül a másik csapatba), az edzésre nem járók elosztása egyértelmű.

A második esetben 10-féleképpen oszthatjuk el az edzésre járókat, és négyféleképp az edzésre nem járókat. Ez $10 \cdot 4 = 40$ lehetőség.

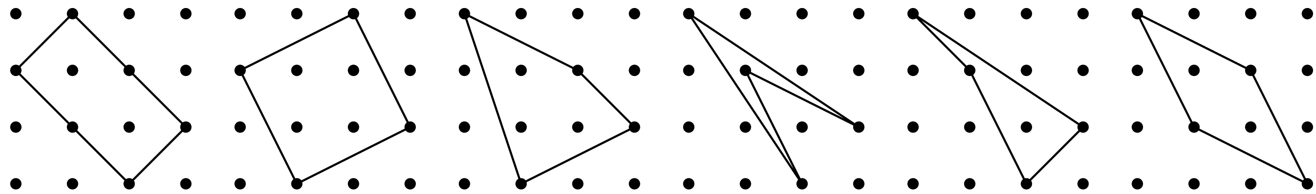
Összesen tehát $5 + 40 = 45$ megfelelő csapatkiosztás van.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

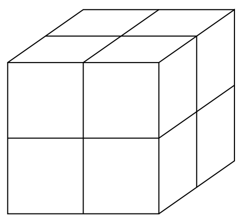
3. Rajzold meg az összes olyan különböző négyszöget, amelynek csúcsai kiválaszthatóak az alábbi 4×4-es pontrácsból úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból egy-egy csúcsot választunk ki.
A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető négyszögeket nem tekintjük különbözőnek.
Nem kell bebizonyítani, hogy az általad talált négyszögeken kívül nincs más.



Megoldás. Hat különböző négyszög rajzolható.



4. Van 8 egységkockám, melyek mindegyike a következőképpen van kifestve: két lapja piros, két lapja kék és két lapja zöld, méghozzá úgy, hogy mindig a szemközti lapok azonos színűek. A 8 egységkockából összeépítettem egy $2 \times 2 \times 2$-es kockát. A nagy kockát letettem az asztalra, így most három (páronként szomszédos) lapját látom. Ezeken összesen 5 piros, 4 kék és 3 zöld kiskockalap látszik. Hány piros kiskockalap lehet látható a másik három lapon összesen?



Megoldás. Mindegyik kis kockának pontosan három, páronként szomszédos lapja látható a nagy kocka valamelyik lapján. Ezek minden egyes kis kockán egy-egy piros, kék és zöld lapot jelentenek, hiszen szomszédos lapokon nem lehet azonos szín. Tehát a nagy kocka hat lapján összesen 8 piros (továbbá 8 kék és 8 zöld) kiskockalap látható. Így ha a felénk eső három lapon 5 piros kiskockalap látható, akkor a másik három lapon összesen 3 piros lapnak kell látszódnia.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

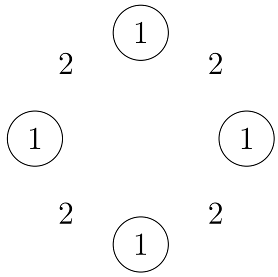
5. Egy iskola fekvőtámaszversenyt rendez. Az első fordulóban 8 gyerek áll fel egy körben. Minden fordulóban 1 perc alatt kell minél több fekvőtámaszt megcsinálni. Aki mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt csinál, annak a forduló végén ki kell állnia a körből. Viszont ha egy forduló végén két szomszédos gyerek egyikének sem kell kiállnia a körből, akkor a két gyerek közé egy újabb gyereket állítanak.

a) Hány gyerek állhat a körben a második fordulóban? Minden lehetséges esetre mutass példát, azaz add meg, hogy az első fordulóban hány fekvőtámaszt csinált a nyolc gyerek!
Azt nem kell indokolni, hogy más eset nem lehetséges.

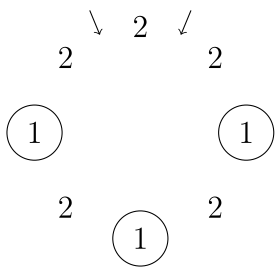
b) Tudjuk, hogy a verseny egyik fordulójában 20 gyerek állt a körben.
Lehetséges-e, hogy a rákövetkező fordulóban 36-an állnak majd a körben?

Megoldás. a) A második fordulóban 4, 7, 10, 13 vagy 16 gyerek vehet részt. Az alábbi ábrákon karikázva jelöljük a kieső gyerekeket és nyíllal azokat a pozíciókat, ahova új gyerek fog belépni. A számérték azt mutatja, hogy hány fekvőtámaszt csinált az adott fordulóban az adott pozíción lévő gyermek.

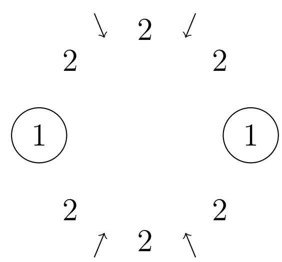
4 gyerek



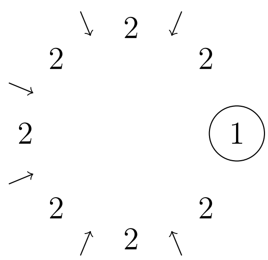
7 gyerek



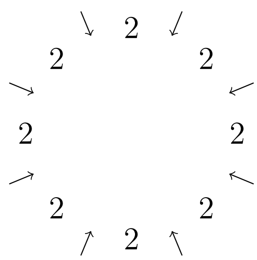
10 gyerek



13 gyerek



16 gyerek



b) Ha a 20 résztvevős fordulóban senkinek nem kell kiállnia, akkor bármely két szomszédos gyerek közé beáll még egy, így 40-en lesznek a következő körben. Ha egyetlen gyereknek kell kiállnia, akkor mellé nem áll be kétoldalt egy-egy újabb gyerek, tehát 37-en lesznek ezután. Ha pedig legalább két gyereknek ki kell állnia, akkor ők nem lehetnek szomszédosak, így legalább négy helyre nem fog beállni új gyerek, tehát legfeljebb 34-en lesznek. Így nem lehetséges, hogy pontosan 36-an versenyezzenek a következő fordulóban.

Megjegyzés. Általában, ha egy körben n résztvevő van, akkor a következőben maximum $2n$ résztvevő lehet. Ha k gyereknek kell kiállnia, akkor pedig csak $2n-3k$ résztvevő lesz, ahol $k \le n/2$.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap