TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ 2. nap

HATODIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Minden feladat teljes megoldása 7 pont

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 9-cel és 25-tel, és mind a négy számjegye különböző?

Megoldás:

A 25-tel osztható számok 00-ra, 25-re, 50-re vagy 75-re végződhetnek. A 00-s végződés nem felel meg, mert a keresett számok számjegyei különbözők.

I. eset: A szám 25-re végződik. A 9-cel való oszthatóság miatt a két hiányzó számjegy összege 2 vagy 11 lehet. Különböző számjegyekkel a $2 = 2 + 0$, de ez nem megfelelő, mert a 2 már szerepel a szám végén; a $11 = 3 + 8 = 4 + 7$ (a többi összegben a 2 vagy az 5 szerepel, ami nem lehet, mert szerepelnek a végződésben).

Így a megfelelő számok: 3825, 4725, 7425, 8325. (4 db szám)

II. eset: A szám 50-re végződik. A 9-cel való oszthatóság miatt a két hiányzó számjegy összege 4 vagy 13 lehet. Különböző számjegyekkel, valamint az 5-öt és a 0-t nem szerepeltetve (mert azok szerepelnek a végződésben), $4 = 1 + 3$ és $13 = 4 + 9 = 6 + 7$.

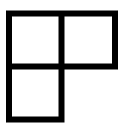
Így a megfelelő számok: 1350, 3150, 4950, 6750, 7650, 9450. (6 db szám)

III. eset: A szám 75-re végződik. A 9-cel való oszthatóság miatt a két hiányzó számjegy összege 6 vagy 15 lehet. Különböző számjegyekkel, valamint az 5-öt és a 7-et nem szerepeltetve (mert azok szerepelnek a végződésben), $6 = 0 + 6 = 2 + 4$ és $15 = 6 + 9$.

Így a megfelelő számok: 2475, 4275, 6075, 6975, 9675. (5 db szám)

Tehát összesen $4 + 6 + 5 = 15$ megfelelő szám van.

2. Egy $8 \cdot 8$-as sakktábla mezőire az ábrán látható módon írtuk be a számokat 1-től 64-ig. Helyezzétek a sakktábla mezőire ezt a három kis négyzetből álló



1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

alakzatot! Hány olyan elhelyezés lehetséges, amelyben a lefedett mezőkben lévő számok összege osztható 3-mal? A kis alakzatot tetszőlegesen forgathatod a sakktáblán!

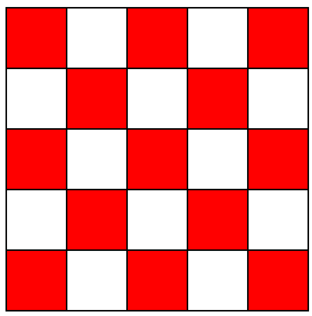
Megoldás:

A bal felső sarokban lévő 2 x 2-es négyzetre kétféleképpen tudjuk ráhelyezni az ábrán lévő figurát úgy, hogy a letakart számok összege osztható legyen 3-mal. Ezek a letakarások 1; 2; 9 és 2; 9; 10. Minden kétszer 2-es négyzetben tehát két ilyen elhelyezés lehetséges. Az ábrán 49 ilyen kis négyzet jelölhető ki, tehát a feladat által kérdezett elhelyezések száma ennek kétszerese, azaz 98.

3. Egy kocka 125 darab 1 cm^3-es fehér és piros kiskockából áll. Közöttük pontosan annyi fehérre festett van, amennyi szükséges ahhoz, hogy a nagykocka külsején a fehér és a piros négyzetlapok sakktáblaszerűen helyezkedjenek el. Hány fehérre festett kocka van a 125 között, ha a csúcsokba piros kockát helyeztünk el?

Megoldás:

I. Egy 5 cm x 5 cm x 5 cm méretű kockát kell készítenünk, amelynek a csúcsaiban pirosra festett kiskockák vannak, egyébként sakktáblaszerűen színezett. Az egyik oldallappal párhuzamosan vágjuk fel a kockát 5 rétegre. Az ábrán látható, hogy 13 piros négyzet lesz a kocka első rétegén, így a hátsó rétegen is. De minket a fehérek száma érdekel, ami 12 mindkét rétegben. A második, harmadik és negyedik rétegben is 8-8 fehér van. Ez összesen 24 + 24 = 48 fehér kocka. Így a fehér kockák száma 48. A szöveg szerint ebből csak annyi kell, hogy sakktáblaszerűen legyen a felszín kiszínezve. A többi kocka mind lehet piros.



II. Gondolhatunk a megoldásnál arra, hogy leszámoljuk a pirosak számát, majd levonjuk a 125-ből. Az előbbi feladat néhány eredményét felhasználva 13 + 8 + 8 + 8 + 13 = 50 piros kocka van a felszínen, továbbá a belsejében még 27 (3 x 3 x 3), tehát 125 – 50 – 27 = 48 fehér.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

4. Egy egyenlőszárú háromszög oldalai rendre (x + 89), (7x + 41) és (3x + 85) cm. Az x értékéről semmi információnk nincs. Hány cm a háromszög kerületének a lehető legnagyobb értéke?

Megoldás:

Ha x+89 egyenlő $7x$+41-gyel, akkor x = 8 cm, így a kerület $K_1 = 97 + 97 + 109 = 303$.

Ha x+89 egyenlő 3x+85-tel, akkor x = 2 cm, így a kerület $K_2 = 91 + 55 + 91 = 237\,cm$.

Ha 7x+41 egyenlő 3x+85-gyel, akkor x = 11 cm, így a kerület $K_3 = 100$ + 118 + 118 = 336 cm. Ebben az esetben lesz legnagyobb a kerület.

A 100, 118, 118 cm oldalú háromszög eleget tesz a háromszög egyenlőtlenség követelményének és egyenlő szárú.

5. Egy nagy papírlapra leírtuk az évszámokat egymásután István király megkoronázásának évétől a mostani évig (2013-ig, a 2013-at is beleértve). Mennyivel egyenlő a leírt évszámok számjegyeinek összege? (Istvánt 1001. január 1-jén koronázták meg.

Megoldás:

I. Vegyük úgy, hogy Istvánt 1000-ben koronázták királlyá. Majd a végén 1-et levonunk. 1000-től 1999-ig az ezresek helyi értékére 1000-szer írtunk egyest. Tehát ezek összege 1000. Most számoljuk le a maradékok számjegy összegét, 000, 001, 002, . . .499, 500, . . . 999. A 000 és a 999 számjegyösszege 27, a 001 és 998 számjegyösszege szintén 27. Vegyük észre, hogy kettesével csoportosítva és kiszámolva a számjegyösszeget mindig 27-et kapunk. 500 ilyen párt tudunk képezni, tehát eddig a számjegyösszeg $500 \cdot 27 = 13500$. 2000-től 2013-ig a számjegyösszeg egyszerűen kiszámolható 2 + 3 + 4 + ... + 11 + 3 + 4 + 5 + 6 = 65 + 18 = 83. A kért összeg 1000 + 13 500 + 83 = 14 583, amiből még 1-et le kell vonni, tehát **14582** a kért számjegyösszeg.

II. A keresett összeget úgy is megkaphatjuk, ha helyi értékenként adjuk össze a számokat. Az ezresek helyén az 1-es 999-szer szerepel, a 2-es 14-szer. Ezek összege 999 + 28 = 1027.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

A 1001 és 1999 között a százasok helyi értékén minden számjegy pontosan 100-szor szerepel, ezért az összeg $100 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 4500$

Ugyanez igaz a tízesek helyi értékére $100 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 4500$, illetve az egyesek helyi értékére $100 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 4500$. Hiányzik még a 2000 és 2013 közötti tízesek és egyesek helyén lévő számjegyösszeg. Ennek értéke: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+2+3+4 = 55$

Tehát 1027 + 4500 + 4500 + 4500 + 55 = 14582 a kért számjegyösszeg.