TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

ORSZÁGOS DÖNTŐ 1. forduló

HATODIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Minden feladat teljes megoldása 7 pont

1. Egy 90 méter hosszú és 28,5 méter széles, téglalap alakú telken nyulakat és tyúkokat tenyészt egy gazda. Amikor egy látogató érkezett, megkérdezte, hogy hány nyúl és hány tyúk van a telepen. A gazda így válaszolt: „Az állatoknak összesen 2652 lábuk és annyi fejük van, mint a telek - m^2-ben kifejezett – terület mérőszámának 2 ötöd része.” A látogató nem ismerte a terület nagyságát, így nem tudta megoldani a feladatot. Segítsünk neki!

Megoldás:

A telek területe 2565 m^2. Ennek 2 ötöd része 1026. A tyúkok száma legyen ty, a nyulak száma legyen ny. Ezért $\left.\begin{matrix} ty+ny=1026 \\ 2\cdot ty+4\cdot ny=2652 \end{matrix}\right\}$. Tegyük fel, hogy a nyulaknak is 2 lába van, akkor $2ty+2ny=2052$. De 2652 – 2052 = 600, ami a nyulak plusz 2 lábával egyezik meg. Tehát 300 nyúl és 726 tyúk van.

Ellenőrzés: az állatok száma 300 + 726 = 1026, a lábak száma 300 négyszerese 1200, valamint 726 kétszerese 1452, ezek összege 1200 + 1452 = 2652.

2. 1 cm élű kockákból 18 x 18 x 18-as méretű tömör kockát raktunk össze, majd a felszínét pirosra festettük. Legkevesebb hány pirosra színezett kiskockát kell elvenni a nagy kockából, hogy a megmaradó test felszíne 2014 cm^2 legyen! Indokolj!

Megoldás:

A nagykocka felszíne $6 \cdot 18^2 = 1944$ (cm^2). 2014 – 1944 = 70 (cm^2)-rel kell növelni a felszínt. 4 cm^2-rel nő a felszín, ha egy lap "belső" részéből veszünk el egy kiskockát. 2 cm^2-rel nő a felszín, ha valamelyik élből (de nem a csúcsból) veszünk el egy kiskockát. Nem változik a felszín, ha a kocka csúcsából veszünk el egy kockát. $70 = 17 \cdot 4 + 2$ így 17 + 1 = 18 kiskocka a legkevesebb ami elvehető. 17 kiskockát lapközépről, egyet pedig él középről kell elvenni.

Megjegyzés: A kiskockák elvétele megvalósítható. Vegyünk el pl. a felső lapról 9, az alsóról 8 kiskockát, de a lapok belsejéből elvett kockák nem lehetnek egymás mellett, valamint az él középről elvett sem lehet szomszédos olyan kiskockával, amelyet elvettünk!

3. A Kalmár döntőre egy iskolából 6 gyerek, valamint Alfa, Béta és Gamma tanár urak utaztak el. Számukra egy sorban 9 egymás melletti helyet tartottak fenn a rendezvény szervezői. A tanárok érkeztek elsőként, és elhatározták, hogy úgy fognak leülni, hogy mindhárman két diák között üljenek. Hányféle ülésrend képzelhető el?

Megoldás:

Soroljuk fel, hányadik helyeken ülhettek a tanárok!

Számozzuk meg a székeket 1-től 9-ig. Nyilván az 1-es és a 9-es székre nem ülhet tanár. Helyeik lehetnek: 246, 247, 248, 257, 258, 268, 357, 358, 368, 468. Tehát 10-féleképpen lehet kiválasztani azt a három széket, amelyekre majd tanárok ülnek. Ha a három széket már kiválasztottuk, akkor közülük az elsőre a 3 tanár bármelyike ülhet, a következő kiválasztott székre a másik kettő közül bármelyik, míg a kiválasztott harmadik székre a harmadik tanár kell hogy leüljön. Vagyis a tanárok $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen tudnak elhelyezkedni a székeken, így a lehetőségek száma $10 \cdot 6$=60. Ha még a gyerekeket is le akarjuk ültetni, akkor az ő lehetséges sorrendjeik száma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$, vagyis a 9 fős küldöttség kívánalmaknak megfelelő ülésrendjeinek száma 60 $\cdot$ 720 = 43200.

4. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel a nulla számjegy?

Megoldás:

Alkalmazzuk az "összes – rossz = jó" megoldó módszert.

Ebben a feladatban is sokkal könnyebb a rossz eseteket megszámolni, vagyis azokat, amelyekben nincs nulla.

Ezekben a számokban minden helyi értéken 9-féle számjegy lehet, ezeknek a száma $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$.

Összesen 9000 négyjegyű szám van, így 9000 – 6561 = 2439 tartalmaz 0-t.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

5. Ha az 1234 négyjegyű számból minden lehetséges módon törlünk két számjegyet, majd az így megmaradt két számjegyet kétjegyű számként kiolvassuk, akkor a 12, 13, 14, 23, 24, 34 számokat kapjuk. Ezek összege 120. Keressetek olyan négyjegyű számot, amelynél ez az összeg ***a*)** 220, ***b*)** 540 ! (Vigyázz! Pl. Az 1052-ben a 02 nem kétjegyű, hanem egyjegyű és értéke 2.)

Megoldás:

a) Nincs ilyen szám. Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Legyen a keresett négyjegyű szám $\overline{abcd}$ alakú, ekkor a keresett összeg:

$$\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ad}+\overline{bc}+\overline{bd}+\overline{cd}=10a+b+10a+c+10a+d+10b+c+10b+d+10c+d$$

A jobb oldal összege: $30a+21b+12c+3d$. Ez az összeg osztható 3-mal, a 220 pedig nem. Tehát az ilyen módon előállított számok összege nem lehet 220.

b) $30a+21b+12c+3d$ =540. Osszuk végig az egyenletet 3-mal: $10a+7b+4c+d=180$ Az a értéke 9 vagy 8 lehet, annál kisebb nem. Ugyanis a = 7 esetén $7b+4c+d=110$, ami lehetetlen még akkor is, ha a = b = c = 9.

Ha $a=9$ és $b=9$, akkor $90+63+4c+d=180$. Innen $4c+d=27$. Két eset lehetséges $c=6$ és $d=3$, vagy $c=5$ és $d=7$. A keresett számok **9963** vagy **9957**.

Ha a = 9 és b = 8, akkor 90 + 56 + 4c + d = 180. 4c + d = 34. Ezen egyenletnek két megoldása van a természetes számok halmazában: c = 8 és d = 2 vagy c = 7 és d = 6. A keresett négyjegyű számok **9882** vagy **9876.**

Ha a = 9 és b = 7, akkor 90 + 49 + 4c + d = 180. 4c + d = 41. A megoldások c = 9 és d = 5 vagy c = 8 és d = 9. A keresett négyjegyű számok **9795** vagy **9789**.

Ha a = 9 és b = 6, akkor 90 + 42 + 4c + d = 180. 4c + d = 48, de ez már nem ad megoldást c-re és d-re.

Ha a = 8 és b = 9, akkor 80 + 63 + 4c + d = 180, azaz 4c + d = 37. Innen c = 9 és d = 1vagy c = 8 és d = 5, vagy c = 7 és d = 9 megoldásokat kapjuk. A keresett négyjegyű szám **8991**, **8985** vagy **8979**.

Ha a = 8 és b = 8, akkor 80 + 56 + 4c + d = 180, azaz 4c + d = 44. Csak a c = 9 és d = 8 lehet megoldás. A keresett négyjegyű szám **8898**.

Ha a = 8 és b = 7, akkor 80 + 49 + 4c + d = 180, azaz 4c + d = 51.

Nincs megfelelő c és d érték ettől kezdve.

Ha a = 7 és b = 9, akkor 70 + 63 + 4c + d = 180, azaz 4c + d = 47. A bal oldal maximum 45 tud lenni, tehát nincs több megoldás.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a talált megoldások helyességéről.