
Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2. forduló

HATODIK OSZTÁLY - MEGOLDÁSVÁZLATOK

1. Egy amerikai nagyvárosban 2014 ház egyetlen sorban helyezkedik el. Minden ház után adót kell fizetni. Az első és az utolsó ház kivételével minden ház adója 1 dollárral kevesebb, mint a két szomszédja által fizetett adó szorzata. Hány dollárt fizetett a 2014 háztulajdonos összesen, ha az első ház adója 2 dollár, a második ház adója pedig 3 dollár?

   Megoldás:

   Az első két ház adója alapján kiszámítható a harmadik, hiszen ott annyi az adó, hogy 2-vel megszorozva 4-et (3+1-et) kell kapnunk. Vagyis a harmadik ház adója 2. Hasonlóan a negyediké 1 (olyan számot keresünk, amivel a hármat megszorozva 2-nél eggyel nagyobbat, vagyis 3-at kapunk), az ötödiké szintén 1, a hatodiké 2, a hetediké 3. Mivel bármely két szomszédos ház adója ismeretében egyértelműen meghatározható a következő ház adója, és ismét két szomszédos házban 2, illetve 3 dollár az adó, ezért innentől kezdve ugyanaz a számolás adja az adó mértékét, mint az előbb. Vagyis innentől kezdve ismétlődik a sorozat, ami tehát így néz ki:

   $$2, 3, 2, 1, 1 \mid 2, 3, 2, 1, 1 \mid 2, 3, 2, 1, 1 \mid \ldots \mid 2, 3, 2, 1, 1 \mid 2, 3, 2, 1$$

   Az is bizonyított ezáltal, hogy egy periódus 5 számból áll. 2014-ig van 402 darab öt hosszú sorozat és még 4 szám. Egy ötös periódusban a számok összege 9. Az eredmény tehát: $402 \cdot 9 + 8 = 3626$.

2. Határozzátok meg azon a, b, c törzsszámokat (prímszámokat), amelyek kielégítik a következő egyenlőséget: $2 \cdot a + 3 \cdot b + 8 \cdot c + 8 \cdot c^2 = 2458$!

   Megoldás:

   Vegyük észre, hogy a jobb oldal páros, a bal oldal értéke egy tag kivételével mind páros. Tehát itt egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $3 \cdot b$ értéke páros. Így csak $b = 2$ jöhet szóba, hiszen a 2 az egyetlen páros prímszám.

   Helyettesítsük be a $b = 2$ értéket, majd vonjunk le mindkét oldalból hatot. Azt kapjuk, hogy $2 \cdot a + 8 \cdot c + 8 \cdot c^2 = 2452$. Egyszerűsítsünk 2-vel, így $a + 4 \cdot c + 4 \cdot c^2 = 1226$.

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014


Kalmár László (matematikus)

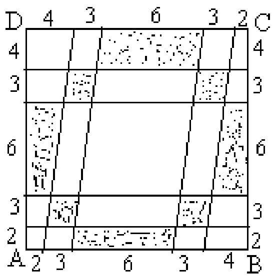
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

A fentihez hasonló okoskodással adódik, hogy $a = 2$. Vonjuk le ezen értéket mindkét oldalból $4 \cdot c + 4 \cdot c^2 = 1224$. Osszuk végig 4-gyel: $c + c^2 = 306$. Átalakítva $c \cdot (c+1) = 306$, de enélkül is lehet. Tehát keresnünk kell egy olyan prímszámot, amelyet a nála 1-gyel nagyobbal szorozva az eredmény 306. Ez a 17, mert $17 \cdot 18 = 306$.

A megoldás $a = 2$, $b = 2$, $c = 17$. Ez jó, mert $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 17 + 8 \cdot 17^2 = 2458$.

3. Az ABCD négyzet DC oldalát rendre 4, 3, 6, 3 és 2 cm-es, az AD oldalát pedig 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es, az AB oldalt 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es, a BC oldalt pedig 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es szakaszokra bontottuk. (Lásd ábra!) Mekkora a pöttyözött rész területe cm^2-ben mérve?



Megoldás:

A négyzet oldala 18 cm.

Az ábrán láthatunk két olyan paralelogrammát, amelyeknek egyik-egyik oldala 6 cm. Az egyik magassága 4 cm, a másiké 2 cm. Átdarabolható téglalapba, tehát a terület $6 \cdot (2+4) = 36\ (cm^2)$.

Látható négy olyan paralelogramma, amelyek alapja 3 cm, magassága szintén. Egy ilyen paralelogramma területe $9\ cm^2$, a négyé pedig $36\ cm^2$.

A „középső sorban” bal és jobb szélen van egy-egy trapéz. Egymás mellé tolhatjuk őket és téglalapot fognak alkotni. Ennek magassága 6 cm, az „alap” pedig 18 – (3 + 6 + 3) = 6 cm. Tehát ezek területe is $36\ cm^2$.

A kérdezett terület a fentiek alapján $36\ cm^2 \cdot 3 = 108\ cm^2$

4. Egy nagyobb könyv oldalait 1-től kezdődően megszámozták az egymást követő természetes számokkal. Minden oldalra írtak számot. A számozáshoz háromszor annyi számjegyet használtak fel, mint ahány oldalas volt a könyv. Hány oldalas volt a könyv?

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

1. megoldás:

Egy 999 oldalas könyv esetén a pozitív egészek leírásához 9+180+2700 = 2889 számjegyet kell felhasználni, míg az oldalszám háromszorosa $3\cdot 999$ = 2997. Ez utóbbi tehát 108-cal több. Ha csökkentjük az oldalak számát, az oldalszám háromszorosa mindig 3-mal, a számjegyek száma viszont 3-mal, majd 2-vel, végül 1-gyel csökken, a különbségük tehát nem tud csökkenni, így ekkor nem lehetnek egyenlők. Ha növeljük az oldalak számát, akkor az oldalszám háromszorosa továbbra is 3-mal, míg 4-jegyű számok esetén a számjegyek száma mindig 4-gyel nő, vagyis a különbség 1-gyel csökken. Így a 108. négyjegyű számnál, az 1107-nél éppen egyenlő a két érték. További növelés esetén a jegyek száma mindig legalább 4-gyel nő, így ettől fogva mindig ez lesz a nagyobb érték. Tehát az egyetlen megoldás az, hogy a könyv 1107 oldalas.

2. megoldás:

Használjuk fel, hogy a 90 darab kétjegyű szám leírásához 180, a 900 darab háromjegyű szám leírásához 2700 stb. számjegy kell.

Vizsgáljuk meg, hogy lehetséges-e, hogy x darab kétjegyű oldalszám van és nincs háromjegyű.

Ekkor a feltétel alapján

$$(9+x)\cdot 3=9+2\cdot x$$
$$27+3\cdot x=9+2\cdot x$$
$$x=-18$$

Ez nem megoldás!

Ha háromjegyű számokat is használunk:

$$(9+90+x)\cdot 3=9+180+3\cdot x$$
$$27+270+3\cdot x=9+180+3\cdot x$$
$$288=0$$

Ez lehetetlen.

Ha négyjegyűeket is használunk:

$$(9+90+900+x)\cdot 3=9+180+2700+4\cdot x$$
$$27+270+2700+3\cdot x=9+180+2700+4\cdot x$$
$$2997+3\cdot x=2889+4\cdot x$$
$$108=x$$

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

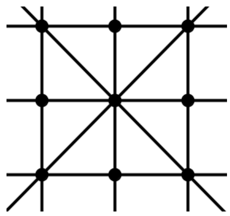
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Tehát 108 darab négyjegyű számot is fel kellett használnunk. Ez azt jelenti, hogy a könyv $999+108=1107$ oldalas.

Világos, hogy ötjegyű oldalszámokkal már nem kaphatunk megoldást.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

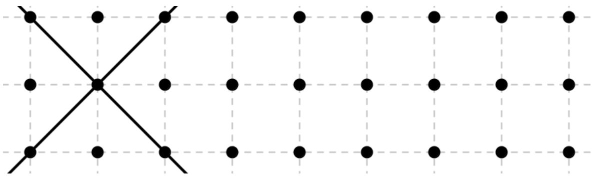
5. Az ábrán látható 3 x 3-as pontrácson behúztuk azon egyeneseket, amelyek legalább 3 ponton mennek át. Látható, hogy összesen 8 ilyen egyenest találtunk. Hány ilyen tulajdonságú egyenest lehet húzni egy 3 x 9-es méretű téglalapon? (Használd a segédlapot!)



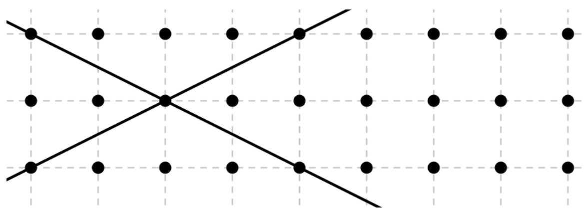
1. megoldás:

Először is a 3 x 9-es pontrácson 3 vízszintes és 9 függőleges egyenest tudunk húzni. Most vegyük azon egyeneseket, amelyek nem párhuzamosak a képzeletbeli x és y tengelyekkel. Ezek mindegyike átmegy a középső sor valamelyik „belső” pontján.

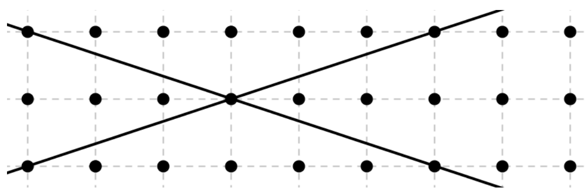
A középső sor 7 „belső” pontján áthaladó, a jobb oldali ábrán látható egyenesekkel párhuzamos egyenesből $7 \cdot 2 = 14$ lesz.



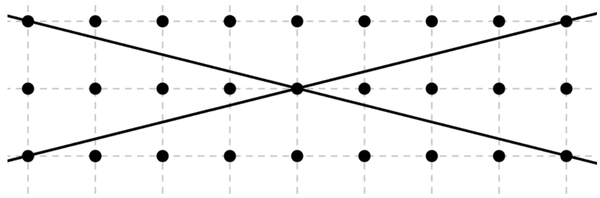
A középső sor 5 „belső” pontján áthaladó, a jobb oldali ábrán látható egyenesekkel párhuzamos egyenesből $5 \cdot 2 = 10$ új egyenest kapunk.



A középső sor 3 „belső” pontján áthaladó, a jobb oldali ábrán látható egyenesekkel párhuzamos egyenesből $3 \cdot 2 = 6$ új egyenest kapunk.



A középső sor középső pontján áthaladó, egyenesből csak az ábrán látható 2 új egyenest kapjuk.



Ez összesen 3 + 9 + 14 +10 + 6 + 2 = 44 egyenes.

2. megoldás:

Továbbra is 3 vízszintes egyenes van az ábrán. A nem vízszintes egyenesek így is számolhatók: fent az *i*-ediknek lent azonos paritással rendelkező sorszámú pár kell. 5 páratlan és 4 páros *i* van 9-ig, ezért $5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 41$ nem vízszintes egyenes van. Ehhez még hozzá kell adnunk a 3 vízszintest, tehát $41 + 3 = 44$ a válasz.