Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

ORSZÁGOS DÖNTŐ 1. forduló

HATODIK OSZTÁLY - MEGOLDÁSVÁZLATOK

1. 2013-ban a Kalmár László Matematika Verseny harmadik (országos) fordulójába a második (megyei) forduló résztvevőinek 3/40-ed része jutott be. Ezeknek pontosan a 2/9-ed része nyert a döntőben (harmadik forduló) díjat vagy oklevelet. Egy első, egy második és két harmadik díjat osztottak ki. Ezeken kívül négy további tanuló kapott oklevelet egy-egy feladat kiemelkedő megoldásáért. Hányan vettek részt a verseny második fordulójában?

   1. megoldás:

   A szövegből kiolvasható, hogy 4 tanuló kapott díjat, további 4 pedig oklevelet. Ez összesen 8 tanuló. A 3/40-ed rész 2/9 része az egésznek $\frac{3}{40}\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{360}=\frac{1}{60}$. Az 1 hatvanad résznek megfelel 8 tanuló, tehát $8 \cdot 60 = 480$ tanuló indult a versenyen.

   Ellenőrzés: a 480 3/40-ed része 36 fő, ennek a 2/9-ed része 8 tanuló.

   2. megoldás:

   A döntőben 8 tanuló képezi a létszám 2/9-ét, így a döntőben 36 tanuló vett részt. A 36 tanuló adja a második forduló létszámának 3/40-ét, vagyis az 1/40 rész éppen 12 tanuló. Tehát $12 \cdot 40 = 480$ tanuló szerepelt a második fordulóban. Ebben az esetben nincs szükség külön ellenőrzésre.

2. A következő feladatban egyforma betűk egyforma számjegyeket jelölnek, különböző betűk különbözőket. A $\square$-ok (téglalapok) a négy alapművelet jelét helyettesítik. Tehát az egyik feladat összeadás, egy másik kivonás, egy harmadik szorzás, egy negyedik osztás. Melyik betű melyik számjegyet jelenti, illetve az egyes feladatokban milyen műveleti jelet kell beírni ahhoz, hogy helyes műveleteket kapjunk?

   (1) $\overline{aab} \square c = \overline{adde}$ (2) $\overline{ccc} \square f = \overline{fff}$

   (3) $\overline{adde} \square c = \overline{ccc}$ (4) $\overline{fff} \square g = \overline{fhd}$

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Megoldás:

Az (1)-ben az első komponensnél nagyobb az eredmény („növelő művelet”), ezért ez csak összeadás vagy szorzás lehet. Összeadás nem lehet, mert az eredmény csak 1-essel kezdődhet, de akkor az első tag is 1-essel kezdődne, így a szám legfeljebb 119 lenne. Ehhez egy egyjegyű számot adva nem kaphatunk négyjegyű számot. Tehát az (I) szorzás.

A (2) nem lehet összeadás, hiszen megváltozik a százas helyi értéken lévő számjegy, vagyis a tízes helyi értéken csak 9-es számjegy lehet, hiszen egy egyjegyű számot adunk a háromjegyűhöz. De ekkor $\overline{ccc}$ 999 lenne, ami nem lehet. Hasonlóan kivonás sem lehet, mert akkor c-nek 0-nak kellene lennie. Vagyis (2) egy osztás.

A (3)-ban az első komponensnél kisebb az eredmény („csökkentő művelet”), ezért a megmaradt összeadás és kivonás közül csak kivonás lehet. Mivel egy négyjegyű számból egy egyjegyű számot kivonva egy háromjegyű számot kaptunk, ebből azonnal kapuk, hogy $\boldsymbol{a=1, d=0, c=9}$ és emiatt $\boldsymbol{e=8}$. Visszatérve (2)-höz egyértelműen kapjuk, hogy $999\boxed{:}3=333$, vagyis $\boldsymbol{f=3}$.

A (4) most már csak összeadás lehet $333\boxed{+}g=\overline{3h0}$, vagyis $g=7$, $h=4$.

A teljes megoldás:

(1) $112\boxed{\cdot}9=1008$ (2) $999\boxed{:}3=333$ (3) $1008\boxed{-}9=999$ (4) $333\boxed{+}7=340$

3. Hány olyan különbözőnek tekinthető téglatest van, amelynek mindegyik éle – centiméterekben kifejezve – egész szám és az élek hossza legalább 2 cm, legfeljebb 8 cm? (Két téglatestet akkor mondunk különbözőnek, ha semmilyen térbeli mozgatással nem hozhatók fedésbe.)

Megoldás:

A keresett téglatestnek lehet

a) 3 egyforma hosszú oldala (kocka),
b) pontosan 2 egyforma hosszú oldala (négyzetes oszlop)
c) és lehet olyan is, hogy bármely két oldal különböző hosszú (nevezzük „általános” téglatestnek).

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Számoljuk meg, hogy melyikből mennyi van:

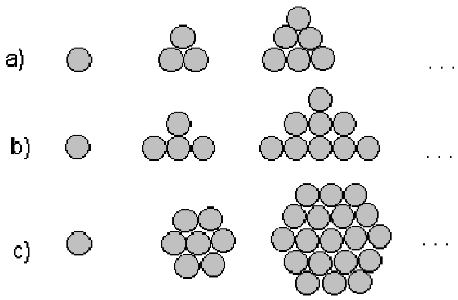
a) A keresett téglatestek között lesz 7 db kocka.

b) A négyzetes oszlopok alaplapjának élét hétféleképpen választhatjuk, de az oldalélt már csak hatféleképpen. A lehetőségek száma 7 · 6 = 42-féle téglatest.

c) Az „általános" téglatestek” (tehát most kizárjuk a kockákat és a négyzetes oszlopokat) éleit 7 · 6 · 5-féleképpen választhatjuk meg. Vegyük észre, hogy az így kapott mindegyik számhármas hat olyan téglatestet szolgáltat, amelyek nem különbözők. Tehát ezen értéket osztani kell 6-tal. Tehát ezek száma $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$.

Összesen 7 + 42 + 35 = 84 különbözőnek tekinthető téglatest lesz.

4. Figyeld meg az ábrák szabályszerűségeit az egyes sorokban. Hány korong van a 100. ábrán az **a**), a **b**) illetve a **c**) sorban?



Megoldás:

Alkalmazzuk a „kis Gauss”-módszert.

a) A korongok száma az előző ábrához képest mindig a következő természetes számmal növekszik (2-vel, 3-mal, 4-gyel stb.). A 100. ábrán emiatt $1+2+3+\ldots+100=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$ korong van.

b) A korongok száma az előző ábrához képest mindig a megfelelő páratlan számmal növekszik. Pl. a 6. ábránál a hatodik páratlan számmal. A páratlan számokat kell összegeznünk 1-től 199-ig. Ez pontosan 100 darab páratlan szám. $1+3+5+\ldots+199=\frac{100\cdot 200}{2}=100^2=10000$.

Mindkét esetben segít az a gondolat, hogy a számokat párosítjuk, az első esetben az 1-et a 100-zal, 2-t a 99-cel stb., a második esetben pedig az 1-et a 199-cel, 3-at a 197-tel stb.

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014


Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

c) A korongok száma az előző ábrához képest mindig hattal többel nő, mint korábban. Vagyis a második ábrán 6-tal, a harmadikon 12-vel, a negyediken 18-cal több korong van, mint az **előző** ábrán. Ezért a 100. ábrán lévő korongok számát így kaphatjuk meg:

$$1+6+2\cdot 6+3\cdot 6+\cdots+99\cdot 6=1+6\cdot(1+2+3+\cdots+99)=1+6\cdot\frac{99\cdot 100}{2}=29701.$$

5. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a kettest a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor a szám kétszeresét kapjuk?

Megoldás:

A szorzat és a szorzandó jegyei ugyanazok, de a szorzatban eggyel kisebb helyi értéken állnak. A szorzat egyesei helyén értelemszerűen 4 áll. De akkor a szorzandó tízesei helyén is 4 áll. Ennek 4-szerese 8, ezt írjuk a szorzat tízesei helyére, de ez kerül a szorzandó százasai helyére is. Folytatva az eljárást megkapjuk a keresett számot:

105 263 157 894 736 842

A helyes szorzás:

$$\begin{array}{l} \underline{105\ \ 263\ 157\ \ 894\ \ 736\ \ 842}\cdot 2 \\ 210\ \ 526\ \ 315\ \ 789\ \ 473\ \ 684 \end{array}$$

Meddig kell folytatni az eljárást? Addig, amíg alul meg nem jelenik a 2-es számjegy. Akkor lehetünk biztosak abban, hogy felső szám kétszerese az a szám, aminek az utolsó 2-es számjegyét az elejére vittünk.

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014