TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Van 10 különböző számkártyánk 0-tól 9-ig. 5 gyerek (Anna, Bea, Cili, Dóra, Enikő) mindegyike húz két-két kártyát, majd összeszorozza a két számot. Ezután a következő igaz mondatok hangzanak el:

   Anna: „Az én számom osztható 26-tal.”
   Bea: „Az én számom osztható 20-szal.”
   Cili: „Az én számom osztható 27-tel.”
   Dóra: „Az én számom osztható 28-cal.”

   (a) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 12-vel?

   (b) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 18-cal?

   Megoldás

   Enikő száma lehetséges, hogy osztható 12-vel: Anna kártyái a 0 és az 1, Beáé a 4 és az 5, Cilié a 3 és a 9, Dóráé a 7 és a 8, Enikőé pedig a 2 és a 6. (***2** pont*)
   Ha egy szám oszt egy másikat, akkor az összes prímosztója is osztja azt, és más prím nem. Jelölje rendre a kapott számokat a, b, c, illetve d.
   Mivel a 26 osztja a-t, így a 13 is. Mivel a 13 nem szerepel a számkártyákon, így a csakis a 0 lehet, vagyis Anna egyik kártyáján a 0 szerepel. (***1** pont*)
   A 27 osztja c-t, így Cili egy kártyáján a 9-es, a másikon pedig a 3-as vagy 6-os áll. (***1** pont*)
   Mivel a 20 osztja b-t, így b értéke vagy 20, vagy 40. Az első esetben Bea kártyáin a 4-es, illetve az 5-ös áll, a második esetben pedig az 5-ös és a 8-as. (***1** pont*)
   Hasonló érveléssel kapjuk, hogy mivel a 28 osztja d-t, így d vagy 28, vagy pedig 56. Az első esetben Dóra kártyáin a 4-es és a 7-es szerepel, a második esetben pedig a 7-es és a 8-as. (***1** pont*)
   Így ezek a kártyák maradhatnak: az 1, a 2 és a 3 vagy a 6. Ezek közül két számnak a szorzata csak akkor lehetne osztható 18-cal, ha az egyik a 3-as a másik a 6-os kártya lenne. Ez a kettő viszont nem lehet egyszerre Enikőnél, mivel a kettő közül az egyik szám Cilinél van. (***1** pont*)

   Összesen: 7 pont

2. Az alább látható táblázatot az következő szabályoknak megfelelően kell kitölteni.

- Bármelyik mezőbe az 1-től 9-ig az egész számok valamelyikét írhatod.
- Egy oszlopban, ill. egy sorban legfeljebb egyszer használhatsz fel egy számot. (A táblázatban, akár többször is.)
- A sorok mellett, ill. az oszlopok fölött az abban a sorban, ill. oszlopban szereplő számok összegét adtuk meg.

	23	21	7
20			
18			
13			

Mutasd meg, hogy csak egy kitöltés lehetséges!

Megoldás

A helyes megoldás megmutatása:

	23	21	7
20	9	7	4
18	8	9	1
13	6	5	2

(***2*** *pont*)

A 7 csak egyféleképpen írható fel összeg alakban: $1 + 2 + 4$.
Viszont a 20 felbontásában nem szerepelhet sem az 1, sem a 2. Így a jobb felső mezőbe csakis a 4 kerülhet. (***1*** *pont*)
A 23 csak egyféleképpen bontható fel: $9 + 8 + 6$.
A bal felső mezőbe nem kerülhet a 6, különben a középső oszlop középső mezőjébe 10-et kellene írnunk, ami ellentmondás. De 8-at sem írhatunk, mert akkor az előbb említett mezőbe szintén a 8 kerülne.
Ezek alapján a felső sor már ki is alakult. (***1*** *pont*)

	23	21	7
20	9	7	4
18			
13			

Ha a jobb oldali oszlop középső mezőjébe a 2-t írnánk, akkor a középső sor maradék két eleme csakis a 7 és a 9 lehetne. De a bal oldali oszlop kimaradt két eleme a 8 és a 6 valamilyen sorrendben. Ez pedig azt jelenti, hogy a jobb oldali oszlop középső mezőjébe az 1 kerül. Így a jobb oldali oszlop is egyértelműen kitölthető. (***1** pont*)

	23	21	7
20	9	7	4
18			1
13			2

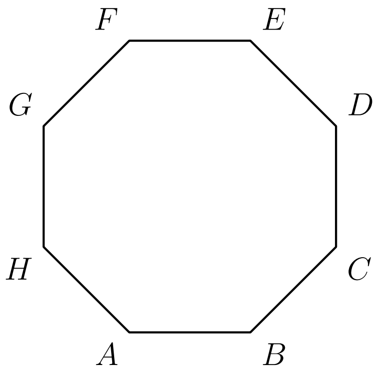
Viszont ekkor a középső sor maradék két eleme nem lehet más, csak a 9 és a 8. Mivel a bal oldali oszlopban már szerepet a 9, így a középső sor is kitölthető egyértelműen. (***1** pont*)

	23	21	7
20	9	7	4
18	8	9	1
13			2

Már csak az alsó sor maradt hátra, de az ottani számok (6 és 5) triviálisan adódnak.
A táblázatban minden összeg helyes, a feladatnak megfelelő kritériumok teljesülnek, és a gondolatmenetből látható, hogy más megoldás nincs. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3. Az ábrán látható szabályos nyolcszög csúcsai közül szeretnénk kiválasztani hármat úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen szomszédos, és semelyik kettő ne legyen átellenes. Hány különböző kiválasztás lehetséges? (Két kiválasztás különböző, ha van olyan csúcs, ami az egyikben szerepel, de a másikban nem.)



Megoldás

A nyolcszögnek hosszúság szempontjából 3-féle átlója van. Legyen a legrövidebb az 1-es, a középső a 2-es, a leghosszabb pedig a 3-as típusú átló.
A feladat értelmében olyan háromszögek csúcsait kell megkeresnünk, melyek oldalai 1-es, illetve 2-es típusú átlók. (***1** pont*)
Egy átló két töröttvonalra osztja a nyolcszöget. Ezen két töröttvonalak közül a nem hosszabban szereplő oldalak darabszámát hívjuk az átló hosszának. Az 1-es típusú átlók hossza tehát 2, a 2-es típusúaké pedig 3. (***1** pont*)
Világos, hogy a háromszögben szereplő átlók hosszainak az összegének 8-nak kell lenni. (***1** pont*)
A 8 csak egyféleképpen bontható fel úgy összegre, hogy a tagok értéke 2 vagy 3: $8 = 2 + 3 + 3$.
Vagyis egy 1-es és két 2-es típusú átló alkotja a keresett háromszögek oldalait. (***2** pont*)
Ez azt jelenti, hogy a háromszögnek pontosan az egyik csúcsából kiinduló oldalak lesznek 2-es típusú átlók. Mivel ezt a csúcsot 8-féleképpen választhatjuk ki, így a megoldás 8. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Sára a következő játékot találta ki. Egy füzetlap első sorába felírt egy pozitív egészekből álló számsort. Ezután a következő sorba az előző sor minden száma helyett leírta növekvő sorrendben 1-től az adott számig az összes pozitív egészt. Majd ugyanezzel a módszerrel képezte a második sor számaiból a harmadik sor számait, és így tovább. Ha például az egyik sorban az

$$5, 1, 2, 3, 2$$

számsor szerepel, akkor a következő sorba az

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2$$

számsort írta.

Hány számot írt Sára a 6. sorba, ha az első sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számsort írta?

Megoldás

Az alábbi táblázatban az egyes sorokban lévő számok darabszámát foglaltuk össze. A kitöltési szabály a következő: a 2. sortól kezdve a k-adik cellába az előtte lévő sorban lévő, a k-nál nem kisebb sorszámú cellák összegét írjuk. (***2*** *pont*)

	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
1. sor	1	1	1	1	1
2. sor	5	4	3	2	1
3. sor	15	10	6	3	1
4. sor	35	20	10	4	1
5. sor	70	35	15	5	1
6. sor	126	56	21	6	1

(***4*** *pont*)

Sára tehát a 6 sorba $126 + 56 + 21 + 6 + 1 = \mathbf{210}$ számot írt. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.