TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2019. május 25.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy tartályban 300 liter víz van. Van négy vödrünk: egy piros, egy zöld, egy kék és egy sárga. A piros vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a zöldbe, a zöld vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a kékbe és a kék vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a sárgába. Miután a négy vödröt teljesen megtöltöttük a tartályban lévő vízből, a tartályban 11 literrel több víz maradt, mint amennyi a kék vödörbe került. Hány liter víz fér a zöld vödörbe?

   Megoldás Jelölje P, K, Z és S hogy rendre hány liter víz fér a piros, kék, zöld és sárga vödrünkbe. A feladat adatai alapján $P = 2Z$, $Z = 2K$, $K = 2S$. Tehát $Z = 4S$ és $P = 8S$. (***2** pont*)

   Ezen kívül azt is tudjuk, hogy $300 - P - K - Z - S - 11 = K$. (***1** pont*)

   A fenti egyenleteket behelyettesítve kapjuk, hogy $300 - 8S - 2S - 4S - S - 11 = 2S$. Tehát $289 = 17S$. (***2** pont*)

   Ebből $S = 17$. Tehát $Z = 4S = 4 \cdot 17 = 68$. (***2** pont*)

2. Dani digitális órája `13:24`-et mutat. Ez azon ritka percek egyike, amikor az órán négy egymás utáni számjegy látható.

   (a) Hány ilyen perc van egy nap folyamán?

   (b) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő ilyen állás között?

   (A digitális órán mindig négy számjegy látható és 24 órás formátumot használ, pl.: `00:41` vagy `21:29`.)

   Megoldás

   Az órában a tízesek helyén csak 0, 1 vagy 2 állhat, ezért a négy szomszédos jegy közül a legkisebb nem nagyobb kettőnél. (***1** pont*)
   Ha a jegyek $0, 1, 2$ és 3, akkor az órák helyén 01, 02, 03, 10, 12, 13, 20, 21 és 23 állhat, és a

percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $9 \cdot 2 = 18$ lehetőség. (*1 pont*)
Ha a jegyek $1, 2, 3$ és 4, akkor az órák helyén 12, 13, 14, 21, 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $5 \cdot 2 = 10$ lehetőség. (*1 pont*)
Ha a jegyek $2, 3, 4$ és 5, akkor az órák helyén csak 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez 2 lehetőség. (*1 pont*)
Tehát összesen $18 + 10 + 2 = 30$ olyan perc van a nap folyamán, amikor teljesülnek a feltételek. (*1 pont*)
A `03:21` és `10:23` egymást követő állások között 7 óra és 2 perc (422 perc) telik el. (*1 pont*)
Ennél nagyobb különbség nincs, hiszen az órák lehetséges értékeit (01, 02, 03, 10, 12, 13, 14, 20, 21, 23) vizsgálva látható, hogy sehol máshol nincs 6-nál nagyobb eltérés, így az időpontok között máskor nem lehet 7 óránál nagyobb különbség. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

3. Péter pénztárcájában 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintosok vannak. Tudjuk, hogy mindegyik pénzérme fajtából különböző számú van, illetve tudjuk, hogy 5 forintos érméből kétszer annyi van, mint 200 forintosból, 100 forintos érméből kétszer annyi van, mint 10 forintosból, valamint 50 forintos érméből nyolcszor annyi van, mint 20 forintosból. Mennyi pénze lehet legfeljebb Péternek, ha kevesebb, mint 2000 forintja van?

Megoldás

Jelölje a, b és c a 10, 20 és 200 forintos érmék darabszámát. Ekkor az 100, 50 és 5 forintos érmék száma $2a$, $8b$ és $2c$, így az érmék összesített értéke

$$(10 \cdot a + 100 \cdot 2a) + (20 \cdot b + 50 \cdot 8b) + (200 \cdot c + 5 \cdot 2c) = 210a + 420b + 210c = 210 \cdot (a + 2b + c)$$

(*1 pont*)

Mivel $420 = 2 \cdot 210$, ezért Péternek 210-zel osztható forintja van. (*2 pont*)
A legnagyobb 210-zel osztható 2000-nél kisebb szám az $1890 (= 9 \cdot 210)$. (*1 pont*)
Mutatunk egy példát arra, hogy ez elérhető.

$a + 2b + c = 9$, aminek egy megoldása $a = 2, b = 1, c = 5$ (a másik megoldás az $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$). Ezekkel az értékekkel az eredeti feladat helyes megoldását kapjuk:

Érme	5	10	20	50	100	200	Összeg
darab betűvel	$2c$	a	b	$8b$	$2a$	c	
darabszám	10	2	1	8	4	5	
érték	50	20	20	400	400	1000	1890

(*3 pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Egy 5×5-ös táblázat minden mezőjére egy-egy pozitív egész számot írtunk (lehetnek közöttük egyenlők). Kiszámoltuk minden sorban és minden oszlopban a számok összegét. Ez a 10 összeg csupa különböző pozitív egész. Mennyi a táblázatban szereplő 25 szám összege, ha az a lehető legkisebb?

Megoldás

Mivel mindegyik sor- és oszlopösszeg legalább 5, és ezek különböző pozitív egészek, ezért összegük legalább

$$5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=95.$$

(***2*** *pont*)

A sorösszegek és oszlopösszegek összege a 25 szám összegének duplája, ezért csak páros szám lehet. A fentiek miatt ez legalább 96, így a 25 szám összege legalább 48. (***2*** *pont*)

A 48-as összeg el is érhető, például így:

1	1	1	1	2
1	1	1	2	2
1	2	2	2	3
1	2	2	3	4
1	2	3	3	4

A sorösszegek itt: 6, 7, 10, 12, 13; az oszlopösszegek: 5, 8, 9, 11, 15. (***3*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.