TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2019. május 24.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy pozitív egész számot *szépséges*nek nevezünk, ha az elejéről, végéről, vagy mindkét irányból néhány számjegyet törölve éppen az eredeti szám számjegyei összegét kapjuk. (Például a 40, 3126, 333150 számok *szépséges*ek.) Hány háromjegyű *szépséges* szám van?

Megoldás

Legyen a számunk $\overline{abc}$, azaz $100a + 10b + c$. Ebben a számjegyek összege $a + b + c$. Meg kell vizsgálnunk néhány esetet, a szerint, hogy honnan törlünk.

Ha az elejéről törlünk egyet, azt kapjuk, hogy $a + b + c = 10b + c$, amiből $a = 9b$. Mivel a nem 0, így ez csak $a = 9, b = 1$ esetén teljesül. Ezek tényleg megfelelőek is: 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919. (***2** pont*)
Ha a végéről törlünk egyet, azt kapjuk, hogy $a + b + c = 10a + b$, amiből $c = 9a$. Mivel a nem 0, így ez csak $a = 1, c = 9$ esetén teljesül. Ezek tényleg megfelelőek is: 109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199. (***2** pont*)
Ha az végéről törlünk kettőt, azt kapjuk, hogy $a + b + c = a$, ami csak akkor teljesülhet, ha $b = c = 0$. Ezek valóban megfelelőek: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. (***1** pont*)
Ha az elejéről törlünk kettőt, azt kapjuk, hogy $a + b + c = c$, ami nem lehet, mivel $a > 0$ és $b \geq 0$. (***1** pont*)
Ha az elejéről és a végéről is törlünk egyet, azt kapjuk, hogy $a + b + c = b$, ami nem lehet, mivel $a > 0$ és $c \geq 0$. (***1** pont*)
Tehát 29 szépséges szám van, ami háromjegyű.

Az indoklás nélküli helyes felsorolása a jó számoknak 2 pont érjen. **Összesen: 7 pont**

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számjegyek közül minél kevesebb felhasználásával állítsd elő a 2019-et! Indokold meg, hogy miért nem lehet kevesebből! Csak az alapműveleteket lehet használni (zárójeleket nem). Minden számjegyet csak egyszer használhatsz és nem lehet többjegyű számokat alkotni.

Megoldás

Öt számjeggyel lehetséges az előállítás: $2019 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + 3$. (***3** pont*)
Belátjuk, hogy négy számjegy nem elegendő. A 2019 a számjegyek közül csak 1-gyel és 3-mal

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

osztható, így csak szorzással biztosan nem lehet előállítani. (***2*** *pont*)
Legfeljebb négy számjeggyel egy legfeljebb négy tagból álló összeget kaphatunk. Az összegben minden tag legfeljebb $9 \cdot 8 \cdot 7$, hiszen nem lehet négytényezős szorzat. (***1*** *pont*)
Ekkor viszont az összeg értéke legfeljebb $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 2016$ lehetne, de ez kisebb 2019-nél. (***1*** *pont*)

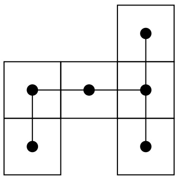
Összesen: 7 pont

3. Hexominóknak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeket megkaphatunk úgy, hogy hat darab egységnyi oldalhosszúságú négyzetet összeillesztünk az oldalaiknál fogva. Hány olyan hexominó van, aminek 12 egység a kerülete? (A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető hexominókat azonosnak tekintjük.)

Megoldás

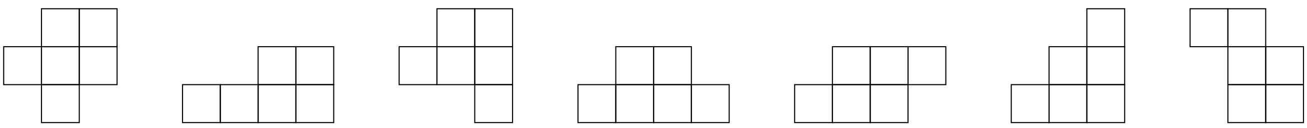
Hat különálló egységnégyzet kerületének összege 24 egység. Amikor két négyzetet egy élük mentén összeillesztünk, akkor az illesztés kettővel csökkenti az összesített kerületet (mert az illesztés a kapott alakzat belsejébe kerül). Ahhoz, hogy végül 12 egység kerületű síkidomot kapjunk, hat él-él illeszkedésnek kell lennie.

Ha van egy négyzetekből összerakott alakzatunk, akkor képezhetjük annak „vázát” a következő módon: jelöljük meg a négyzetek középpontját egy-egy kis körrel, és ezek közül kössük össze azokat, amelyek élszomszédos négyzetek középpontját jelölik. Ha az így kapott vázban nincs „kör”, akkor pontosan öt összekötés van benne, ezért a kerület $24 - 10 = 14$, ami túl sok. (***1*** *pont*)



Könnyen látható, hogy csak azon vázak tartalmaznak kört, amelyek olyan alakzathoz tartoznak, amelyben van egy kétszer kettes négyzet. (***1*** *pont*)
Az összes megoldás felsorolásához ezért csak azokat az eseteket kell végignézni, amikor egy kétszer kettes négyzethez még két egységnégyzetet ragasztottunk.

A megoldások:



1-2 jó konstrukcióért 1 pont, 3-4 konstrukció 2 pont, 5 konstrukció 3 pont, 6 konstrukció 4 pont, 7 konstrukció 5 pont. (***5*** *pont*)

Összesen: 7 pont

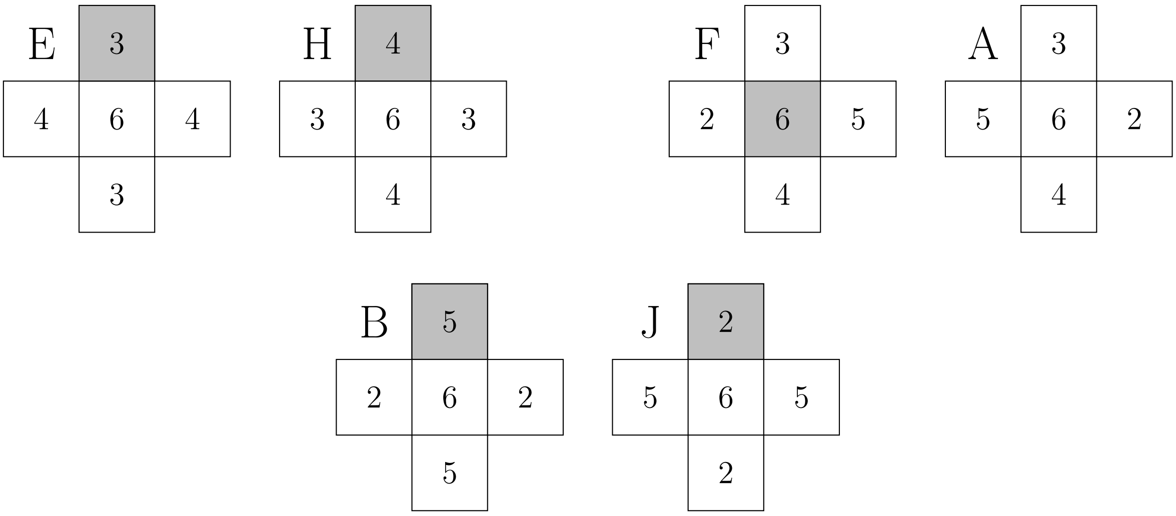
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Hét szabályos dobókockát összeragasztottunk úgy, hogy az egyik kocka minden lapjához egy-egy további kocka egy-egy lapját illesztettük. A testre ezután a lapokra merőleges irányokból ránézve, mind a hat lehetséges irányból ugyanannyi pöttyöt látunk. Hány pöttyöt láthatunk legfeljebb? Rajzoljátok le a testet mind a hat irányból (elölről, hátulról, balról, jobbról, alulról és felülről)! (Egy dobókocka szabályos, ha a szemközti lapjain a pöttyök összege hét.)

Megoldás

A hét dobókockán összesen $7 \cdot 21 = 147$ pötty van. A legbelsőből semmit sem látunk így $6 \cdot 21 = 126$ pöttynél nem látható több.

Ezen kívül még minden külső kockának is le van takarva egy oldala, tehát még legalább 6 pötty takarva van. Így legfeljebb 120 pötty látható. Ha ez elérhető, akkor minden irányból 20 pöttyöt kell látnunk. (***3** pont*)
Megadunk egy megfelelő elrendezést. A legfelső kockát más színnel ábrázoljuk, hogy megkönnyítsük a térbeli „tájékozódást”. (A felül- és alulnézet „kívülről” értendő, ezért a hármas és négyes lapok valójában egymással szemben vannak.)



(***4** pont*)

Ha valaki ad egy olyan konstrukciót, amin jók a kockák, és minden irányból ugyanannyi látszik, de kevesebb mint 20, akkor is kapjon 1 pontot.

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy téglalap szomszédos oldalai 4 egység és 7 egység hosszúak. Osszuk fel a téglalapot négy darab tengelyesen szimmetrikus négyszögre úgy, hogy a felosztásban szereplő bármely négyszög bármely oldalának hossza vagy 3 egység, vagy 4 egység legyen!

1. megoldás

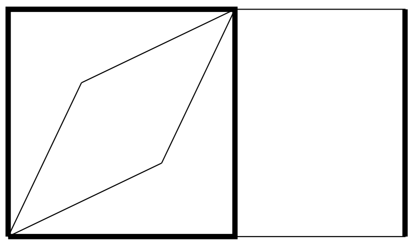
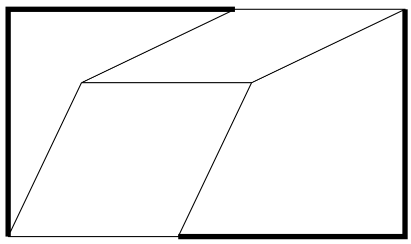
Osszuk fel a téglalapot egy 4 egység oldalú négyzetre és egy 3×4-es téglalapra. A négyzet egyik átlóján jelöljük meg azokat a pontokat, amelyek 3 egység távolságra vannak a másik átló mindkét végpontjától. A megfelelő 3 egységnyi szakaszokat berajzolva a négyzet két konkáv deltoidra és egy rombuszra bomlik, amelyek tengelyesen szimmetrikusak, ahogy a 3×4-es téglalap is, ezzel a kívánt felosztást megadtuk. (Lásd a bal oldali ábrát!)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

A téglalap egyik belső szögfelezőjén jelöljük meg a csúcshoz legközelebbi olyan pontot, amely 3 egységnyire van a téglalap rövidebb oldalának másik végpontjától. Ezt a csúcsot a szögfelezőre tükrözve , és a megfelelő szakaszokat behúzva egy konkáv deltoidot kapunk, melynek minden oldala vagy 3, vagy 4 egység hosszú. A szemközti csúcsból induló szögfelező segítségével, de ezúttal a csúcstól távolabbi pontot választva hasonló módon egy konvex deltoidot kaphatunk. A két deltoid szimmetriaátlóinak a téglalap csúcsaitól különböző végpontjait összekötve két rombusz keletkezik. Ezzel megkaptuk a kívánt felosztást. (Lásd a jobb oldali ábrát!)

Összesen: 7 pont

Az ábrákon a vastag vonalak négy, a vékony vonalak három egység hosszú szakaszokat jelölnek.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.