TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2021. május 29.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. 12 hatodikos focizik, 6 a 6 ellen. Közülük öten járnak fociedzésre, heten nem. Hanna nem jár fociedzésre, de olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Megoldás. Hannának vagy öt edzésre járó, vagy négy edzésre járó és egy edzésre nem járó, vagy három edzésre járó és két edzésre nem járó csapattársra van szüksége.

Az első esetben egyértelmű a csapatkiosztás, Hannának az öt edzésre járó gyerek lesz a csapattársa.

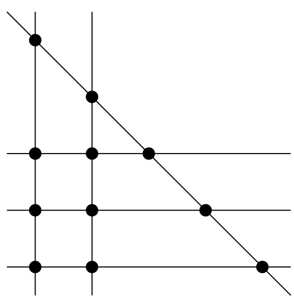
A második esetben az edzésre járók közül ötféleképp választhatjuk azt az egyet, aki a másik csapatba kerül (avagy azt a négyet, aki Hanna csapattársa lesz). Az edzésre nem járók közül pedig hatféleképp választhatjuk azt az egyet, aki Hanna csapattársa lesz. Ez $5 \cdot 6 = 30$ lehetőség.

A harmadik esetben az edzésre járók közül tízféleképp választhatjuk azt az egyet, aki a másik csapatba kerül (avagy azt a hármat, aki Hanna csapattársa lesz). Az edzésre nem járók közül pedig 15 különböző módon választhatjuk azt a kettőt, akik Hanna csapattársai lesznek. Ez $10 \cdot 15 = 150$ lehetőség.

Összesen $1 + 30 + 150 = 181$ megfelelő csapatkiosztás van.

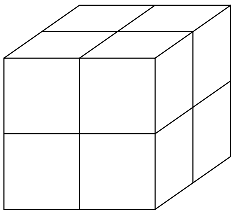
2. Megadható-e 6 egyenes a síkon úgy, hogy semelyik három ne menjen át egy ponton, és a metszéspontok száma pontosan 11 legyen?

Megoldás. Igen, megadható. Vegyünk három egymással párhuzamos egyenest, továbbá kettőt, amelyek egymással párhuzamosak, de az előzőekkel nem, és végül a hatodik egyenes egyik korábbival se legyen párhuzamos.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Van 8 egységkockám, melyek mindegyike a következőképpen van kifestve: két lapja piros, két lapja kék és két lapja zöld, méghozzá úgy, hogy mindig a szemközti lapok azonos színűek. A 8 egységkockából összeépítettem egy $2 \times 2 \times 2$-es kockát. A nagy kockát letettem az asztalra, így most három (páronként szomszédos) lapját látom. Ezeken összesen 5 piros, 4 kék és 3 zöld kiskockalap látszik. Hány piros kiskockalap lehet látható a másik három lapon összesen?



Megoldás. Mindegyik kis kockának pontosan három, páronként szomszédos lapja látható a nagy kocka valamelyik lapján. Ezek minden egyes kis kockán egy-egy piros, kék és zöld lapot jelentenek, hiszen szomszédos lapokon nem lehet azonos szín. Tehát a nagy kocka hat lapján összesen 8 piros (továbbá 8 kék és 8 zöld) kiskockalap látható. Így ha a felénk eső három lapon 5 piros kiskockalap látható, akkor a másik három lapon összesen 3 piros lapnak kell látszódnia.

4. Karolina bekarikázott a $1, 2, 3, 4, \dots, 20$ számok közül 11-et úgy, hogy ne legyen köztük kettő, amelyek közül az egyik kétszerese lenne a másiknak. Lujza ránézett a bekarikázott számokra, és megállapította: „Akármelyiket is karikáznám be a maradék 9 szám közül, már lenne két bekarikázott szám, amelyek közül az egyik kétszerese a másiknak.”
a) Bekarikázhatta-e Karolina az 1-et?
b) Bekarikázhatta-e Karolina a 20-at?

Megoldás. a) Lehetséges, hogy Karolina bekarikázta az 1-et, például így:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

A bekarikázottak közül egyik sem kétszerese a másiknak. A 3-nak, a 4-nek és az 5-nek szerepel a kétszerese, a 2-nek, 12-nek, 14-nek, 16-nak, 18-nak és 20-nak pedig a fele, így Lujza megállapítása is teljesül.

b) Lujza megállapításából következik, hogy a 11, 13, 15, 17, 19 számok mind be vannak karikázva, hiszen különben bármelyiket hozzávehetnénk a már bekarikázott számokhoz. Hasonló okból az 1-2, 3-6, 5-10, 7-14, 8-16, 9-18 számpárok valamelyik tagja is biztosan be van karikázva. Vagyis a fenti számok közül $5+6=11$-et biztosan bekarikáztunk. Így a 20-as szám bekarikázása már $5+6+1=12$ darab bekarikázott számot jelentene. Tehát a 20 nem lehet bekarikázott szám.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. a) Adj meg egy olyan hétjegyű számot, melynek értéke megfeleződik, ha a számjegyeit növekvő sorrendbe állítjuk!
b) Adj meg minél többféle 11-jegyű számot, melynek értéke megfeleződik, ha a számjegyeit növekvő sorrendbe állítjuk!

A 0 számjegy egyik esetben sem használható.
Elegendő a számokat megadni, indoklást nem kérünk.

Megoldás. a) Ilyen hétjegyű szám a

$$\mathbf{2491578} = 1245789 \cdot 2.$$

b) Ilyen 11-jegyű számok:

$$\mathbf{24669133578} = 12334566789 \cdot 2$$
$$\mathbf{24691357998} = 12345678999 \cdot 2$$
$$\mathbf{24915799998} = 12457899999 \cdot 2$$

Megjegyzés. Hogyan lehet ezeket a számokat megtalálni? Szorozzuk meg a számjegyeket növekvő sorrendben tartalmazó 123456789 számot írásban 2-vel:

$$\begin{array}{r} \underline{123456789} \quad \cdot \quad 2 \\ 246913578 \end{array}$$

Megfelelő számot kapunk, de kilencjegyűt. Észrevehető, hogy a 3-as és 6-os számjegyek párban állnak, így ezek elhagyásával megfelelő hétjegyű számot kapunk. Az is látszik, hogy 9-esek, valamint egyenlő számú 3-as és 6-os betoldásával növelhetjük a jegyek számát, így eljuthatunk a 11-jegyű megoldásokhoz. Bizonyítható, hogy a fentebb megadott számokon kívül más szám nem felel meg a feltételeknek.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.