TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ 2. nap

HETEDIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Minden feladat teljes megoldása 7 pont

1. Bizonyítsd be, hogy 1-től 2013-ig minden természetes szám előállítható a 2000 néhány osztójának összegeként! (Minden osztót legfeljebb egyszer szabad felhasználni egy szám előállítása során.)

Megoldás:

A 2000 osztói közül csak a következőkre lesz szükségünk: 1, 2, 4, 5; 10, 20, 40, 50; 100, 200, 400, 500; és az 1000, 2000.

Minden természetes számot 1-től 2013-ig bontsunk fel helyi értékesen! Vegyük észre, hogy az egyjegyűek előállíthatók az 1, 2, 4, 5 számokkal. Pl: 3 = 1 + 2, vagy 6 = 1 + 5, 7 = 2 + 5, 8 = 1 + 2 + 5, 9 = 4 + 5. Hasonlóan belátható, hogy a kerek tízesek előállíthatók 10, 20, 40, 50 segítségével. Ugyanez elmondható a kerek százasokról, előállíthatók 100, 200, 400, 500 ügyes megválasztásával. Az ezresek előállítása pedig még egyszerűbb.

2. Három tanuló játékgolyókkal játszik. A golyókat a játék megkezdése előtt $7:6:5$ arányban osztották szét egymás között. Játékgolyóik számának aránya a játék végén a tanulók ugyanazon sorrendje szerint $6:5:4$. Valaki közülük 12 darab golyót nyert. Hány játékgolyót kaptak az egyes tanulók a játék megkezdése előtt?

Megoldás:

Ha a játék kezdetén $7:6:5$ arányban osztották szét, akkor 7x-et kapott az első, 6x-et a második, 5x-et a harmadik tanuló. Tehát 7x + 6x + 5x = 18x golyó van.

A játék befejezésekor ugyanezen adatok: 6y + 5y + 4y = 15y.

Vegyük észre, hogy a középső tanuló minden esetben a golyók pontosan harmadát birtokolja. Tehát ő nem nyerhetett 12 golyót.

A harmadik sem nyerhetett, hiszen ő a kiindulásnál a golyók $\frac{5}{18}$ részét birtokolta, a

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

befejezésnél pedig $\frac{4}{15}$ részt és $\frac{5}{18} > \frac{4}{15}$, mert $\frac{5}{18} = \frac{25}{90} > \frac{4}{15} = \frac{24}{90}$.

Tehát csak az első játékos nyerhetett 12 golyót. Ő a kiindulásnál a golyók $\frac{7}{18} = \frac{35}{90}$ részét birtokolta, a befejezésnél pedig $\frac{6}{15} = \frac{36}{90}$ részt. Tehát „minden 90 golyó után nyer egy golyót”, így $12 \cdot 90 = 1080$ golyónak kellett lenni eredetileg.

Ellenőrzés után látható, hogy ez jó eredmény. A játék megkezdése előtt 420, 360 és 300 golyót kaptak a játékosok. A befejezésnél 432, 360, 288 golyó volt a játékosoknál.

3. Egy „matematikus” kenguru a számegyenesen ugrál véletlenszerűen egyet jobbra vagy egyet balra tetszése szerint. Ugrásai 1 egységnyi hosszúak. Jelenleg a kezdőponton (nullán) áll és a 6-os ponton szeretne megpihenni, befejezni az ugrálást.

a) Az egyik alkalommal 8 ugrással jutott el a 6-os pontba pihenni. Hányféleképpen tehette meg az utat?

b) Egy másik alkalommal 10 ugrással jutott el a 6-os pontba pihenni. Hányféleképpen tehette meg az utat?

Megoldás:

a) Ha 8 ugrással tette meg az utat, akkor egy alkalommal lépett balra és hétszer jobbra. Az 1 darab balra ugrás lehetett az 1., 2, 3, ... 7. 8. Ez nyolc lehetőség.

b) Ha a kenguru 10 ugrással jutott el a kezdőpontból a 6-os pontba, akkor 8-szor ugrott jobbra és kétszer balra. Tehát a 10 ugrás közül ki kell választanunk kettőt, amikor balra ugrott. Az első balra ugrás lehetett az 1., a 2., ... a 10. Vagyis 10-féle, a második csak 9-féle. De teljesen mindegy, hogy először a balra ugrása pl. a 4. és 7. ugrás volt, vagy a 7. és a 4. Tehát a kérdéses ugrássorozatok száma $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

A feladatot megoldhatjuk rendszerezett felsorolással is, csak egy kicsit hosszadalmas és kevesebb matematika tudást igényel.

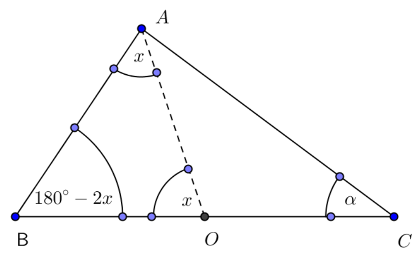
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

4. Egy háromszög legnagyobb oldala kétszerese a legrövidebbnek. A legnagyobb oldallal szemközti szög háromszorosa a legkisebb oldallal szemközt lévő szögnek. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge?

Megoldás:

Az ABC háromszögben BC oldalának felezőpontja legyen O. A feltételből következik, hogy AB = BO = OC. Tehát ABO háromszög egyenlő szárú. Legyen $BAO_\angle = x$. Ekkor $BOA_\angle = x$ és $ABO_\angle = 180° - 2x$.



Ha a C csúcsnál lévő szöget α-val jelöljük, akkor a feladat feltétele miatt $BAC_\angle = 3\alpha$, így $ABC_\angle = 180° - 4\alpha$. Tehát a B csúcsnál lévő szögre két értéket kaptunk, ezeknek meg kell egyezni: $180° - 4\alpha = 180° - 2x$, azaz $2\alpha = x$. Tudjuk, hogy a háromszögekben a két belső szög összege egyenlő a harmadik szög külső szögével, ezért $OAC_\angle = \alpha$, vagyis az AOC háromszög egyenlő szárú, amiből az következik, hogy ABO háromszög szabályos. Tehát a vizsgált háromszög szögei 30, 60 és 90 fokosak.

5. Kovács úr egy évre bérbe akarja adni a házát. A hirdetményén a következő szöveg olvasható:

> Ez a ház kiadó egy évre!
> $7 \ x \ HÁZBÉR = 6 \ x \ BÉRHÁZ$

A bérleti díjat Kovács úr $HÁZBÉR$-nek írta. Minden betű más-más számjegyet jelöl, egyforma betűk egyforma számjegyeket. A felírt szorzás igaz. Mennyibe kerül a $HÁZBÉR$?

Megoldás:

Legyen HÁZ = x és BÉR = y, tehát mindkettő háromjegyű természetes szám. Ekkor $7 \cdot (1000x + y) = 6 \cdot (1000y + x)$. Végezzük el a szorzásokat: $7000x + 7y = 6000y + 6x$. Rendezve: $6994x = 5993y$. Állítsuk elő az együtthatók törzstényezős alakját $6994 = 2 \cdot 13 \cdot 269$, illetve $5993 = 13 \cdot 461$. A $6994x = 5993y$ egyenlőség teljesüléséhez az kell, hogy $x = 461$ és $y = 538$ legyen. Itt figyelembe vettük, hogy x és y egyaránt

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

háromjegyűek. Tehát HÁZBÉR = 461 538.

Ellenőrzés: $7 \cdot 461538 = 6 \cdot 538461$, ami igaz, mert mindkettő 3230766.