TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ 1. nap

HETEDIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Minden feladat teljes megoldása 7 pont

1. 9 kg mogyorót vásároltunk, kilogrammonként 1800 forintért. A mogyoró megtisztítása után - lemérve a kapott mogyoróbelet és héjat - megállapítottuk, hogy a mogyoróhéj súlya a mogyoróbél súlyának 2 harmadrésze. Mennyibe kerül a mogyoróbél kilogrammja?

Megoldás

9 kg mogyoróért 9·1800=16200 Ft-ot fizettünk. Ha x jelöli a mogyoróbél súlyát, akkor $\frac{2}{3}x$ a mogyoróhéj súlya. Tehát: x + $\frac{2}{3}x$ = 9, s innen x = 5,4 kg. Tehát 5,4 kg mogyoróbelet 16200 Ft-ért vettünk, így 1 kg ára 16200:5,4= 3000 Ft.

A feladat nehézsége abban rejlik, hogy a tanulók a mogyoróhéjjal is úgy számolnak, mintha az is értékes lenne.

2. 1-től 100-ig az egész számokat két színnel kiszíneztük: 74 számot pirosra, a maradék 26-ot kékre.

a) Bizonyítsd be, hogy a pirosak összege nem lehetett egyenlő a kékek összegével!

b) Legfeljebb hány számot színezhettünk pirosra, ha a fenti két összeg megegyezett?

Megoldás:

a) Az első 100 pozitív egész szám összege 5050. Ha a pirosak összege egyenlő a kékek összegével, akkor mindkettő 2525. Ha a 74 legkisebbet színeztük pirosra, akkor ezek összege $1+2+3+...+74=\frac{74\cdot 75}{2}=2775$, tehát több, mint 2525. Így a kékek összege nem lehetett egyenlő a pirosak összegével.

b) A 2775 és 2525 különbsége 250. Ezen érték előállításához arra kell törekednünk, hogy sok "kicsi" számot fessünk pirosra. Legyen az első 70 szám piros. Ezek összege $\frac{70\cdot 71}{2}=2485$. Tehát hiányzik még 40. A 40-nel való növelést elérhetjük új szám behozása nélkül a következő módon: a 70 helyett szerepeljen pl. a 100, a 69 helyett a 79.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Okoskodhatunk úgy is, hogy megvizsgáljuk, legkevesebb hány számot színezhettünk kékre. Ha a 29 legnagyobb számot és a 31-et színeztük kékre, akkor ezek összege

$$31+72+73+\ldots 100=31+\frac{172\cdot 29}{2}=31+2494=2525.$$

Látható, hogy legfeljebb 70 számot színezhettünk pirosra és legalább 30-at kékre.

3. Keressétek meg az összes olyan csupa különböző számjegyből álló háromjegyű számot, amelynek a számjegyeiből képezhető, különböző számjegyeket tartalmazó kétjegyű számok összege egyenlő az eredeti háromjegyű számmal!

Megoldás:

I. megoldás: Felírhatjuk, hogy $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{bc}+\overline{cb}$. Helyi értékes bontás után $100a+10b+c=22\cdot(a+b+c)$. Látható, hogy a jobb oldal páras és osztható 11-gyel, így a bal oldal is. Vegyünk el mindkét oldalból $a+b+c$-t. Ekkor $99a+9b=21\cdot(a+b+c)$. Itt a bal oldal osztható 9-cel, tehát a 3 osztója $a+b+c$-nek. Ezen számelméleti okoskodással kiderítettük, hogy az eredeti háromjegyű szám osztható 66-tal. A szóba jöhető megoldások: 132, 198, 264, 330, 396, 462, 528,… Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy csak a 132, 264, 396 ad jó megoldást.

II. megoldás: 100a + 10b + c = 22a + 22b + 22c egyenletet rendezve 78a = 12b + 21c, ezt 3-mal osztva: 26a = 4b + 7c.

A jobb oldal legfeljebb 99, így 26a lehet 26, 52, vagy 78. Ezt a három lehetőséget kell végigpróbálni:

a = 1 esetén 4b + 7c = 26, amiből b = 3 és c = 2.

a = 2 esetén 4b + 7c = 52, amiből b = 6 és c = 4.

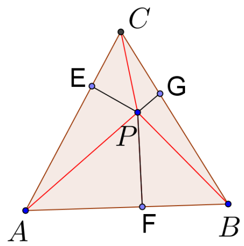
a = 3 esetén 4b + 7c = 78, amiből b = 9 és c = 6.

Tehát a megoldások: 132, 264, 396.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

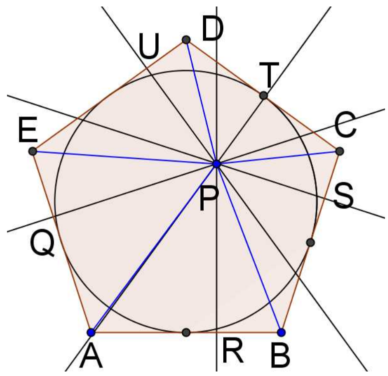
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

4. Egy n oldalú szabályos sokszög oldalhossza legyen a, beírt körének sugara r. A sokszög belsejében felvettünk egy P belső pontot, amelyből merőlegeseket állítottunk a sokszög minden oldalának egyenesére. Igaz-e, hogy ezen merőleges szakaszok hosszának összege állandó? (n = 3, n = 4, n = 5, n = 6)



Megoldás:

Először kísérletezünk.



n = 3 esetén az eredeti ABC szabályos háromszöget bontsuk fel 3 részháromszögre: ezek ABP, BCP és CAP lesznek. Ezen háromszögekben az oldalakra bocsátott merőlegesek lesznek a magasságvonalak. Legyen az ABC háromszög C-ből induló magasságvonala m. Írjuk fel kétféleképpen a háromszög területét:

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

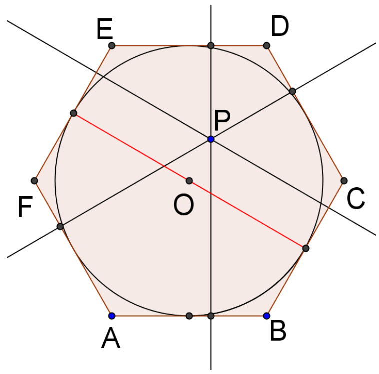
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

$\frac{AB \cdot m}{2} = \frac{AB \cdot PF}{2} + \frac{BC \cdot PG}{2} + \frac{AC \cdot PE}{2}$. Egyszerűsítések után $m = PF + PG + PE$. Most csak annyit láttunk be, hogy kérdéses szakaszok összege állandó és a szabályos háromszögnél ez éppen a magasság hossza. Nagyobb n-re azonban már nincs ebben az értelemben vett magasság.

<u>n = 4</u> esetén rajzoljunk egy ABCD négyzetet! A rajzról azonnal leolvasható, hogy az oldal hosszának kétszerese lesz a négy szakasz összhossza.

<u>n = 5</u> esetén már problémásabb a helyzet.

A kész ábrán sok hasonlóságot fedezhetünk fel a szabályos háromszög esetével. A merőlegesek talppontjait Q, R, T, S, U-val jelöltük. Kössük össze a P pontot az ötszög csúcsaival. Ezen háromszögekben a PQ, PR, PS, PT és PU magasságok lesznek. Az ötszög területét írjuk fel két különböző módon. Egyrészt az EAP, ABP, BCP, CDP és DEP háromszögek területének összegeként, másrészt az oldal és a beírt kör sugara segítségével. Ez utóbbit jelöljük r-rel. Az ötszög oldalait válasszuk 1-nek. A fenti gondolatból azonnal adódik, hogy $QP + RP + SP + TP + UP = 5 \cdot r$, tehát a szabályos ötszögnél is állandó a feladatbeli érték, s ez a megoldás mutatja igazán az általánosítási lehetőséget. **Minden n-re a kérdéses szakaszok összege a beírt kör sugarának n-szerese.**



<u>n = 6</u> esetén vegyünk fel egy ABCDEF szabályos hatszöget! A P pontból az oldalakra bocsátott merőlegesek összhossza egyenlő a hatszög két szemközti oldala távolságának háromszorosával.

<u>5.</u> Számítsd ki 2013-nak azt a legkisebb többszörösét, amely 2014-re végződik!

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Megoldás:

$\underline{2013}\cdot ABCD$	$\underline{2013}\cdot ABC8$	$\underline{2013}\cdot AB78$	$\underline{\underline{2013}\cdot 5078}$
$PQRT$	16104	16104	16104
$XYZW$	$XYZW$	14091	14091
$EFGH$	$EFGH$	$EFGH$	0000
$\underline{KLMN}$	$\underline{KLMN}$	$\underline{KLMN}$	$\underline{10065}$
$---2014$	$---2014$	$---2014$	$---2014$

A feladat azon alapszik, hogy a hármas (hetes, kilences) szorzótábla minden eleme más és más számjegyre végződik, így az ilyen feladatok "visszafejtése" egyértelmű. A feladatot írásbeli műveletként érdemes megoldani. A szorzást a szorzó egyeseivel kezdjük. A 2013-hoz keresünk egy olyan D számjegyet, amivel szorozva 4-esre fog végződni a részletszorzat. Ez egyértelmű, mert csak D = 8 esetén teljesül.

Most vizsgáljuk, a második részletszorzatot! Ennek 1-esre kell végződnie, de a hármas szorzótábla elemei közül csak a 7-szer 3 végződik 1-esre.

A harmadik részletszorzat nyílván 0.

A részletszorzatok ezres helyi értékén keletkezett egy tízes átlépés, ezt figyelembe kell venni. A negyedik részletszorzatnak 5-re kell végződni. Ez az 5-tel való szorzásnál teljesül.

Az eredményünk valóban jó, mert 2013 x 5078 = 10 222 014.

Várható hiba, hogy a legkisebb többszöröst összetévesztik a legkisebb közös többszörössel.