Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2. forduló

HETEDIK OSZTÁLY- MEGOLDÁSVÁZLATOK

1. Tamást megkérdezték, hogy hányadik helyen végzett a városi mezei futóversenyen. Ő így válaszolt: „Ha az előttem végzett tanulók negyedrésze utánam következne, akkor hattal többen lennének utánam, mint előttem.” Hányadik lett Tamás a versenyen, ha összesen 97-en indultak?

1. megoldás: Egyenlettel.

Tamás nélkül 96 tanuló van. Tegyük fel, hogy Tamás előtt x tanuló végzett, ekkor utána $96 - x$. Az előtte végzettek negyedét helyezzük át a szövegnek megfelelően, így előtte már csak $\frac{3}{4}x$ végzett. Mögötte pedig $96 - x + \frac{1}{4}x = 96 - \frac{3}{4}x$. Ez utóbbi 6-tal több, mint a $\frac{3}{4}x$. Írjunk fel egyenletet: $96 - \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x + 6$. Vonjunk ki mindkét oldalból 6-ot, majd adjunk mindkét oldalhoz $\frac{3}{4}x$ -et, kapjuk, hogy $90 = \frac{6}{4}x$, azaz $90 = \frac{3}{2}x$. Tehát $180 = 3x$, s így $x = 60$.

Tamás előtt 60-an végeztek, mögötte 36-an. A 60 negyedét (a 15-öt) áttesszük mögé, így már csak 45-en vannak előtte és 36 + 15 = 51-en mögötte, s a különbség valóban 6.

Tehát Tamás a 61. helyen végzett a versenyen.

2. megoldás: Logikai úton.

Olvassuk a szöveget „visszafelé”: „...akkor hattal többen lennének utánam, mint előttem." Küldjünk el 6 tanulót, akkor előtte és utána is ugyanannyian végeztek. 96 - 6 = 90, aminek a fele előtte, fele utána végzett. Ez 45-45 fő. Ez a 45 fő az előtte végzettek 3 negyede, tehát az 1 negyede 15, a 4 negyed pedig 60 fő. Eredetileg 60 fő végzett előtte, mögötte pedig 46.

Tehát Tamás a 61. helyen végzett a versenyen.

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

2. Egy horgász a napi zsákmánya össztömegének 35%-át kitevő három legnagyobb halat a mélyhűtőbe tette. A három legkisebb halat, amelyek együttesen a megmaradt rész össztömegének 5/13-át tették ki, elvitte a macska, a többit pedig megfőzték ebédre. Hány halat fogott a horgász?

Megoldás:

Legyen az össztömeg *X*. Ekkor a nagyhalak mennyisége $0{,}35 \cdot X$, a kishalak össztömege $\frac{5}{13} \cdot 0{,}65 \cdot X = 0{,}25 \cdot X$, ezt vitte el a macska. A „közepes halak" össztömege tehát $X - 0{,}35 \cdot X - 0{,}25 \cdot X = 0{,}4 \cdot X$, ezt főzték meg ebédre. Ez biztosan több mint 3 hal együttes tömege, hiszen a 3 nagy hal is $0{,}35 \cdot X$. Ha 5 „közepes hal" lett volna, akkor köztük lett volna 3 olyan hal, amelyek össztömege legfeljebb $3 \cdot \frac{0{,}4X}{5} = 0{,}24X$ -et tesz ki. De a három legkönnyebb is nehezebb ennél.

Tehát megmutattuk, hogy háromnál több „közepes halról" van szó, de ötnél kevesebbről, így marad a 4 hal lehetősége. A horgász ezek szerint 3 + 4 + 3 = 10 halat fogott.

Ez megvalósítható pl. a következő módon:

3 hal egyenként $\frac{0{,}35 \cdot X}{3}$, 4 hal egyenként $0{,}1 \cdot X$, 3 hal pedig egyenként $0{,}08 \cdot X$.

3. Keressétek meg az összes olyan egész számot, amely lehet egy szabályos sokszög belső szögének fokban kifejezett mérőszáma.

Megoldás:

Az *n* oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(\mathrm{n}-2)\cdot 180°$. Tudjuk, hogy egy szabályos sokszög minden belső szöge egyenlő, ezért minden csúcsnál a belső szög nagysága $\frac{(\mathrm{n}-2)\cdot 180°}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}\cdot 180° - 360°}{\mathrm{n}} = 180° - \frac{360°}{\mathrm{n}}$. Vagyis azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen $n \geq 3$ egész szám esetén lesz a $180° - \frac{360°}{\mathrm{n}}$ is egész. A $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ osztóit kell megkeresnünk, de kihagyjuk az 1, 2 értékeket, mert ilyen oldalszámmal nem létezik sokszög.

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

22-féle olyan szabályos sokszög van, amelyben a belső szögek fokokban mért mérőszáma egész szám. Az oldalak száma a következő 22 szám lehet:

3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Az *n* oldalszám ismeretében a $180° - \dfrac{360°}{n}$ képlettel kiszámítjuk a megfelelő szabályos sokszög egy szögének mérőszámát. A következő számokat kapjuk: 60, 90, 108, 120, 135, 140, 144, 150, 156, 160, 162, 165, 168, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179.

4. Jelöljük a 999^{999} számjegyei összegét A-val. Legyen A számjegyei összege B, a B számjegyei összege pedig legyen C. Mivel egyenlő C?

Megoldás:

A 999^{999} számjegyösszegét felülről becsüljük meg.

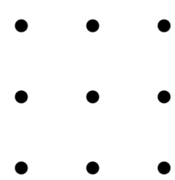
Mivel $999^{999} < 1000^{1000} = \left(10^3\right)^{1000} = 10^{3000}$, ezért 999^{999} értéke egy legfeljebb 3001 jegyű természetes szám. Ha ezen szám minden jegye 9-es lenne, akkor a számjegyösszeg 27009 lenne. Tehát $A \le 27009$.

A 27009-nél nem nagyobb természetes számok közül legnagyobb számjegyösszege a 19999-nek van. Ennek számjegyösszege 37, így $B \le 37$.

A 37-nél nem nagyobb természetes számok közül a 29-nek van a legnagyobb számjegyösszege, így $C \le 11$.

Mivel 999^{999} osztható 9-cel, ezért csak C = 9 lehetséges.

5. A jobb oldali ábrán 9 pontot láthatunk 3 x 3-as elrendezésben. Hány olyan különbözőnek tekinthető négyszög van, amelynek csúcsai a 9 pont közül kerülnek ki? Két alakzatot akkor mondunk különbözőnek, ha mozgatással nem hozhatók fedésbe. A rajzaid elkészítéséhez használd a segédlapot! Mindegyik négyszöget másik ábrán rajzold meg!



FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Megoldás: A lehetőségek felsorolásával válaszolunk. Célszerű külön kezelni a konvex és a konkáv négyszögek esetét. Ezen belül a konvex négyszögek csoportosíthatók átlóik „típusa” alapján. Összesen 16 lehetőség van.