Kalmár László (matematikus)

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

## 43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
## ORSZÁGOS DÖNTŐ, 1. forduló

## HETEDIK OSZTÁLY - MEGOLDÁSVÁZLATOK

1. Az Edison háza előtti kertkaput nehéz volt kinyitni, ezért az egyik barátja megszólta, hogy "Igazán megjavíttathatnád már a kapudat, ez nem illik egy ilyen technikai zsenihez, mint te vagy". Mire Edison: „A kapumat értelmesen terveztem meg. Rákötöttem a ciszternára (vízgyűjtő medence), s mindenki, aki betér hozzám, 20 liter vizet pumpál a ciszternámba.” Később Edison a 20 literes edényről áttért egy 25 literesre, de ekkor elegendő volt 12-vel kevesebb látogató a ciszterna megtöltéséhez. Hány literes a ciszterna? Hány látogató kellett eredetileg a megtöltéséhez?

**Megoldás:**

Legyen a látogatók száma eredetileg $x$, a nagyobb edénynél pedig $x - 12$ fő. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet:

$20 \cdot x = 25 \cdot (x - 12)$ Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$20 \cdot x = 25 \cdot x - 300$

$5 \cdot x = 300$, innen $x = 60$.

Ez azt jelenti, hogy eredetileg 60 vendég tudta telepumpálni a ciszternát, ami $60 \cdot 20 = 1200$ literes.

2. Ha a Nyíregyházi Vadaspark Totó nevű kétpúpú tevéje nagyon szomjas, akkor a testtömegének 84%-a víz. Itatás után 800 kg-ot nyom, s ekkor testtömegének 85%-a lesz víz. Hány kilogrammos Totó, ha szomjas?

**Megoldás:**

A 800 kg 85%-a $800 \cdot 0{,}85 = 680\ (\mathrm{kg})$ a teve víz tartalma, tehát a teve tömege a feltételek szerint 680 kg vízből és 120 kg szárazanyagból tevődik össze. Ez a 120 kg a szomjas teve testtömegének

16%-a. Ha a 16% 120 kg, akkor az 1% 7,5 kg $\left(=\frac{120}{16}\right)$. Így a teve tömege pedig 750 kg. Tehát Totó 750 kg-ot nyom, ha szomjas.

3. Mennyi az A és B átlagának (számtani közepének) pontos értéke, ha

$$A=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{99}{100} \text{ és } B=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{4}+\ldots+\frac{99^2}{100}?$$

**Megoldás**:

Vegyük észre, hogy mindkét kifejezésben 99 tag szerepel. Adjuk össze A és B megfelelő sorszámú tagjait! Az első tagok összege: $\frac{1}{2}+\frac{1^2}{2}=1$

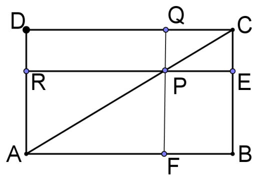
A második tagok összege: $\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3}=\frac{2+2^2}{3}=\frac{2\cdot(2+1)}{3}=2$

A harmadik tagok összege: $\frac{3}{4}+\frac{3^2}{4}=\frac{3+3^2}{4}=\frac{3\cdot(3+1)}{4}=3$

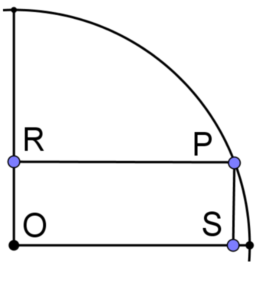
Az utolsó tagok összege: $\frac{99}{100}+\frac{99^2}{100}=\frac{99+99^2}{100}=\frac{99\cdot(99+1)}{100}=99$.

Tehát a keresett összeg 1 + 2 + 3 + … + 99 = 4950. A kért számtani közép pontos értéke ennek a fele, vagyis 4950 / 2=2475.

4. Az ABCD téglalap AC átlójának tetszőleges pontja legyen P. P-n át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal (Lásd ábra). Igazold, hogy az RPQD téglalap területe egyenlő a PEFB területével.



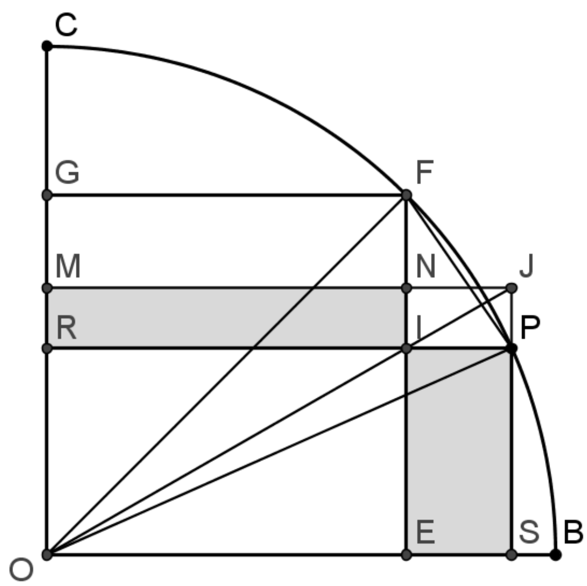

Egy negyed körcikk körívén felvettünk egy tetszőleges P pontot, amelyen át párhuzamosakat húztunk a határoló sugarakkal. Hol kell felvennünk a P pontot ahhoz, hogy a PROS téglalap területe a lehető legnagyobb legyen?



**Megoldás:**

a) Felhasználjuk, hogy az átló felezi a téglalap területét. Tehát az ADC és az ABC háromszögek területe egyenlő. Hasonlóan az ARP és AFP területe is egyenlő, továbbá PQC és PEC háromszögek területe is egyenlő.

Vonjuk le az ADC háromszög területéből ARP és PQC háromszögek területét, marad az RPQD téglalap területe. Ugyanígy az ABC háromszög területéből vonjuk le az AFP és a PEC háromszögek területét: marad a PEFB téglalap területe. Mivel egyenlő területekből egyenlő területeket vettünk el, a kapott területek is egyenlők, tehát az RPQD téglalap területe egyenlő a PEFB területével.




b) Az a) részben kimondott állítást fogjuk alkalmazni. Belátjuk, hogy a téglalap területe akkor maximális, ha a P pont a negyed körív felezőpontjával esik egybe.

Legyen a negyed körív felezőpontja F. Vegyünk fel egy F-től különböző P pontot a BF köríven. Megmutatjuk, hogy az OEFG téglalap területe nagyobb, mint az OSPR téglalap területe (lásd ábra).

Az EF és RP egyenesek metszéspontja legyen I, Az SP és OI egyeneseké J. A J-ből EF-re állított merőleges EF egyenest az N, OG egyenest az M pontban metszi. Ekkor az OSJM téglalapra alkalmazva a feladat előző részében megfogalmazott állítást azt kapjuk, hogy ESPI téglalap területe megegyezik RIMN téglalap területével. Következésképp az OSPR és az OENM téglalapok területe is egyenlő.

Az ábráról ugyan jól látszik, de bizonyítást igényel, hogy $T_{OENM} < T_{OEFG}$. Ehhez elég belátni, hogy IN < IF.

Kalmár László (matematikus)



Az OFP∡ az OFP egyenlő szárú háromszög egyik alapon fekvő szöge, így kisebb 90°-nál, belőle a 45°-os OFE szöget elvéve kapjuk, hogy IFP∡ < 45° < FPI∡. Mivel nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, az IFP derékszögű háromszögben IP < IF.

A P pont választása miatt FE = FG = OE > PS = IE. Az OEI derékszögű háromszögben a hosszabb OE befogóval szemben van a nagyobb hegyesszög, tehát 45° < OIE∡ = NIJ∡. Az NIJ derékszögű háromszögben így NJ a hosszabb befogó, azaz IN < NJ = IP. Korábban láttuk, hogy IP < IF, tehát valóban IN < IF.

Így $T_{OSPR} = T_{OENM} < T_{OEFG}$, ezzel az állítást beláttuk. A gondolatmenet hasonlóan alkalmazható az FC köríven felvett P pont esetén is.

**Megjegyzések:** 1. Valójában nincs szükség az a) rész alkalmazására, hiszen IF > IP, valamint RI = OE = EF > SP miatt IF · RI > IP · SP, így közvetlenül is látszik, hogy az ESPI téglalap területe kisebb a RIFG téglalap területénél, ebből pedig következik a feladat állítása.

2. Egy további megoldást mutatunk a b) részre. A köríven tetszőlegesen felvett P pont esetén Pitagorasz tételét felírva az OSP és OEF derékszögű háromszögekre:

$OS^2 + SP^2 = OP^2$ és $OE^2 + EF^2 = OF^2$.

Felhasználva, hogy OE = EF, valamint hogy OP és OF egyaránt a negyedkör sugarai, adódik, hogy $OS^2 + SP^2 = r^2 = 2 \cdot EF^2$. Legyen $OS^2 = EF^2 + x$, és $SP^2 = EF^2 - x$.

Az OSPR téglalap területe akkor maximális, ha a négyzete maximális, azaz ha $(OS \cdot SP)^2 = OS^2 \cdot SP^2 = (EF^2 + x)(EF^2 - x) = EF^4 - x^2$ a lehető legnagyobb. Mivel $EF^2$ értéke rögzített (megegyezik $r^2$ felével), ezért a fenti kifejezés akkor és csak akkor maximális, ha $x^2$ minimális, azaz ha $x = 0$. Ekkor pedig $OS^2 = EF^2 = SP^2$ miatt OS = EF = SP, tehát P = F. Tehát a téglalap területe pontosan akkor maximális, ha P-t a negyedkör felezőpontjában vesszük fel.

5. Egy fejszámoló bűvész a közönségével a következő játékot játssza: a közönségből valakit megkér, hogy gondoljon egy olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű számra, amelyben nincs 0. Jelöljük a gondolt számot $\overline{abc}$-vel. Ezt csak a közönségnek mondják meg, akik képezik a következő számokat: $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$, majd megmondják a bűvésznek ezek összegét, amit N-nel jelölünk. Mi volt a gondolt szám, ha N = 3194?

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Kalmár László (matematikus)

**Megoldás**:

A szöveg alapján felírhatjuk, hogy $N = \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$. Vegyük észre, hogy csak az $\overline{abc}$ hiányzik. Adjuk hozzá mindkét oldalhoz:

$$N + \overline{abc} = \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} + \overline{abc}$$

A jobboldalt bontsuk fel helyi értékesen! Ezek után az előbbi egyenlőség így írható: $N + \overline{abc} = 222 \cdot (a + b + c)$, azaz $3194 + \overline{abc} = 222 \cdot (a + b + c)$.

Átrendezzük: $\overline{abc} = 222 \cdot (a + b + c) - 3194$. A számjegyösszeget innen már kitalálhatjuk, mert $a + b + c > 14$, hiszen $14 \cdot 222 = 3108$ kevés. a $19 \cdot 222 = 4218$ túl sok, mert ekkor $\overline{abc} > 1000$ lenne.

Ha $a + b + c = 15$, akkor $\overline{abc} = 136$ adódik, ami nem megfelelő, mert $1 + 3 + 6 = 10$, vagyis nem 15.

Ha $a + b + c = 16$, akkor $\overline{abc} = 358$ adódik, ami megfelelő, mert $3 + 5 + 8 = 16$.

Ha $a + b + c = 17$, akkor $\overline{abc} = 580$ adódik, ami nem megfelelő, mert $5 + 8 + 0 = 13$, ami nem 17.

Ha $a + b + c = 18$, akkor $\overline{abc} = 802$ adódik, ami nem megfelelő, mert $8 + 0 + 2 = 10$, ami nem 18.

Tehát a feladatnak egy megoldása van: a 358.