TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Adott egy 90 egység területű nagy téglalap. Szeretnénk az oldalakkal párhuzamos vágásokkal felosztani kilenc kisebb téglalapra úgy, hogy a kapott téglalapok közül a bal felső területe 1 egység, a jobb felsőé 3, a bal alsóé 9, a középsőé pedig 10 egység legyen.

1		3
	10	
9		

Mutasd meg, hogy a nagy téglalap alakjától függetlenül mindig van ilyen felosztás, és add meg a hiányzó öt kis téglalap területének egy-egy lehetséges értékét! (Nem kell megkeresni az összes lehetséges felosztást.)

Megoldás

Osszuk fel a téglalap vízszintes oldalait $1:2:3$, függőleges oldalait pedig $1:5:9$ arányban, és kössük össze a megfelelő osztópontokat. Az ábra jelöléseit használva a nagy téglalap területe: $(x+2x+3x)\cdot(y+5y+9y) = 6x\cdot 15y = 90xy = 90$. Ebből $xy = 1$, és a kis téglalapok területének nagysága is ellenőrizhető.

	x	$2x$	$3x$
y	1	2	3
$5y$	5	10	15
$9y$	9	18	27

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.

Bebizonyítható, hogy a fenti az egyetlen megfelelő felosztás.

2. Egy számot emelkedőnek nevezünk, ha balról jobbra olvasva minden számjegye nagyobb az előtte állónál. (Például a 36 és a 2579 emelkedő számok.) Hány olyan háromjegyű emelkedő szám van, amelynek az ötszöröse **nem** emelkedő szám?

Megoldás

Egy emelkedő szám nem tartalmazhat nullát, és számjegyei különbözőek. Ilyen háromjegyű számból $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ darab van, azonban a három számjegy hat lehetséges sorrendje közül mindig pontosan egy emelkedő, tehát $504 : 6 = 84$ háromjegyű emelkedő szám van. (***3** pont*)

Egy szám ötszöröse 0-ra vagy 5-re végződhet. Ha 0-ra végződik, akkor biztosan nem emelkedő. (***1** pont*)

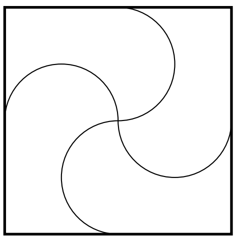
Egy háromjegyű szám ötszöröse 500 és 5000 közé esik. Ha egy ilyen szám 5-re végződik, akkor csak úgy lehet emelkedő, ha négyjegyű. (***1** pont*)

A négyjegyű, 5-re végződő emelkedő számok: 1235, 1245, 1345 és 2345. Ezek a 247, 249, 269 és 469 ötszörösei, amelyek mind emelkedő számok. (***1** pont*)

Tehát a 84 emelkedő háromjegyű szám közül csak a fenti négynek nem emelkedő az ötszöröse, azaz **80** olyan háromjegyű emelkedő szám van, amelynek ötszöröse nem emelkedő. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3. Anna játékkészletében az ábrán látható mintájú színes lapok szerepelnek. A négy egybevágó tartomány mindegyike a kék, sárga, zöld vagy piros színek valamelyikével van színezve. A készletben csak olyan lapok vannak, aminél két tartomány különböző színű, ha van közös határvonala. Hány különböző lapot tartalmazhat legfeljebb Anna készlete? (A forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek.)



Megoldás

(Egyik lap sem lehet egyszínű.) Ha két színnel van kiszínezve egy lap, akkor a szemközti tartományok lesznek azonos színűek. Mivel a két szín kiválasztására a négyből 6 lehetőség van, így 6 lap van, ami kétszínű. (***1** pont*)

Ha három színnel van kiszínezve egy lap, az csak úgy valósulhat meg, hogy két szemközti tartomány egyszínű, a másik két szemben lévő pedig a másik két színt kapja. Az utóbbiak sorrendje a forgatás miatt nem számít. A kétszer használt színt négyféleképpen választhatjuk ki, és hogy mi legyen a másik két szín, azt háromféleképpen. Így összesen $4 \cdot 3 = 12$ lap van, ami háromszínű. (***3** pont*)

Ha mind a négy színt felhasználjuk, akkor pl. a kék tartománytól elindulva az óramutató járása szerint, az első tartomány színe 3-féle, a második (kékkel szemközti) színe 2-féle lehet, az utolsó tartomány színe egyértelmű. Látható, hogy ezen lehetőségek nem forgathatók egymásba. Így négy színt használva 6 lehetőség van. (***2** pont*)
Összesen tehát $6 + 12 + 6 = \mathbf{24}$ lapból áll Anna játékkészlete. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

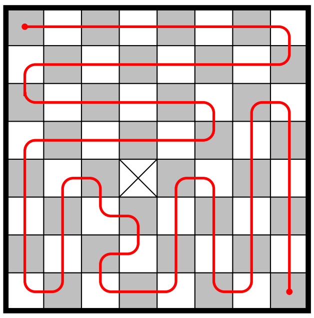
4. Egy 8×8-as táblázat mezőit kitöltjük az 1-től 64-ig terjedő pozitív egész számokkal úgy, hogy minden szám pontosan egy mezőben szerepel. Ezután a táblázat bal felső sarkából indulva sétálunk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

   - mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
   - egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
   - a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.

   A séta során érintett mezőkön (beleértve a kiinduló- és az utolsó mezőt is) lévő számokat összeadjuk. Az összes lehetséges kitöltést és azokon az összes lehetséges sétát tekintve mennyi ennek az összegnek a legnagyobb lehetséges értéke?

Megoldás

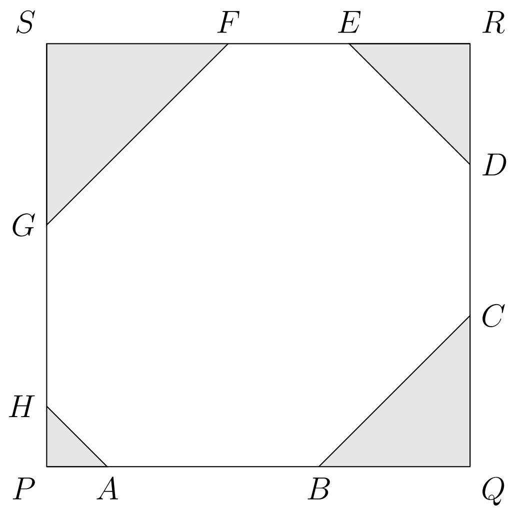
Színezzük ki a táblázat mezőit sakktáblaszerűen. Legyen a bal felső mező mondjuk fekete. Mivel minden lépésben más-más színű mezőre lépünk, és végül azonos színű mezőre érkezünk, mint amilyenről elindultunk, páros számú lépést kell megtennünk. (***2** pont*)
Ha az összes mezőt érintené a séta, akkor 63 lépésre lenne szükségünk, de ez páratlan. Tehát nem léphetünk rá minden mezőre, legalább egy kimarad. (***1** pont*)
Az alábbi ábrán szemléltetjük, hogy elérhető, hogy pontosan egy mező maradjon ki. (***1** pont*)



Mivel minden bejárást és kitöltést tekintünk, így akkor kapjuk a lehető legnagyobb összeget, amikor a kimaradt mezőn az 1-es szám áll. (***1** pont*)
Az összeg pedig: $2 + 3 + 4 + \cdots + 64 = \frac{2+64}{2} \cdot 63 = 2079$. (***2** pont*)

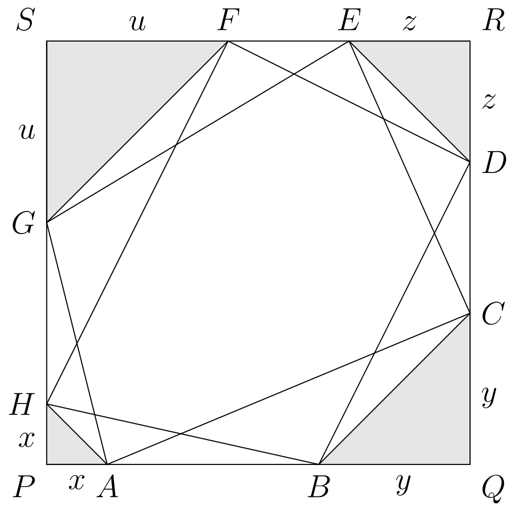
Összesen: 7 pont

5. A $PQRS$ négyzetből a sarkainál levágtuk a PAH, QCB, RED, SGF egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az $ACEG$ és a $BDFH$ négyszög területe egyenlő.



1. megoldás

Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy a négyzet oldala 1 egység. Vezessük be a következő jelöléseket: $x = PA$, $y = QC$, $z = RE$, $u = SG$.



(***1** pont*)

Ezekkel a jelölésekkel:

$$T_{AQC} = \frac{(1-x)y}{2}, \quad T_{CRE} = \frac{(1-y)z}{2}, \quad T_{ESG} = \frac{(1-z)u}{2}, \quad T_{GPA} = \frac{(1-u)x}{2},$$

illetve

$$T_{BQD} = \frac{(1-z)y}{2}, \quad T_{DRF} = \frac{(1-u)z}{2}, \quad T_{FSH} = \frac{(1-x)u}{2}, \quad T_{HPB} = \frac{(1-y)x}{2}.$$

(***2*** *pont*)

Mindezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_{ACEG} &= T_{PQRS} - (T_{AQC} + T_{CRE} + T_{ESG} + T_{GPA}) = \\ &= 1 - \frac{x+y+z+u-xy-yz-zu-ux}{2}, \end{aligned}$$

(***2*** *pont*)

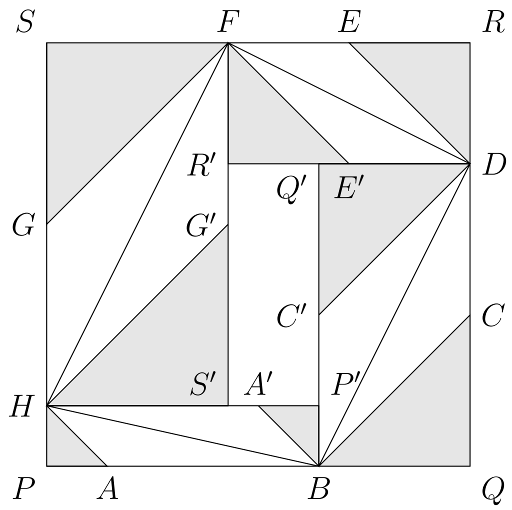
valamint

$$\begin{aligned} T_{BDFH} &= T_{PQRS} - (T_{BQD} + T_{DRF} + T_{FSH} + T_{HPB}) = \\ &= 1 - \frac{x+y+z+u-xy-yz-zu-ux}{2}. \end{aligned}$$

A két kifejezés azonos, ezzel az állítást igazoltuk. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás



Legyen a négyzet oldalának hossza a.

Az ábrát úgy kapjuk, hogy tükrözzük a P és az A pontot a HB felezőpontjára, a Q és a C pontot a BD felezőpontjára, az R és az E pontot a DF felezőpontjára, az S és a G pontot az FH felezőpontjára. A tükrözésekből adódó egybevágóságokat felhasználva az jön ki, hogy a $BDFH$

négyszög területe megkapható úgy, hogy az $ABCDEFGH$ nyolcszög területéhez hozzáadjuk a BQC, DRE, FCG, HPA háromszögek és a $P'Q'R'S'$ téglalap területét, és a kapott területet elfelezzük. (***4*** *pont*)

Így már csak azt kell megmutatni, hogy ha a P, Q, R, S pontokat a GA, AC, CE, EG szakaszok felezőpontjára tükrözzük, akkor a kapott $P''Q''R''S''$ téglalap területe megegyezik a $P'Q'R'S'$ téglalap területével. Ez viszont nem nehéz, mert az utóbbi területe könnyen látható módon $|a - BQ - FS| \cdot |a - DR - HP|$, az előbbié pedig $|a - PA - RE| \cdot |a - QC - SG|$. Ezek pedig egyenlők, mert a négyzet sarkaiban lévő egyenlő szárú derékszögű háromszögek miatt $BQ = QC$, $FS = SG$, $DR = RE$ és $HP = PA$. (***3*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.