TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2019. május 24.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy téglalap szomszédos oldalai 4 egység és 7 egység hosszúak. Osszuk fel a téglalapot négy darab tengelyesen szimmetrikus négyszögre úgy, hogy a felosztásban szereplő bármely négyszög bármely oldalának hossza vagy 3 egység, vagy 4 egység legyen!

1. megoldás

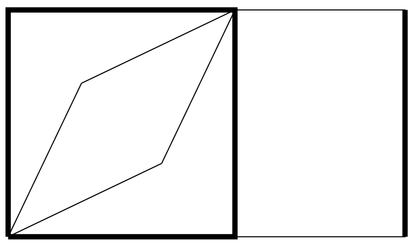
Osszuk fel a téglalapot egy 4 egység oldalú négyzetre és egy 3×4-es téglalapra. A négyzet egyik átlóján jelöljük meg azokat a pontokat, amelyek 3 egység távolságra vannak a másik átló mindkét végpontjától. A megfelelő 3 egységnyi szakaszokat berajzolva a négyzet két konkáv deltoidra és egy rombuszra bomlik, amelyek tengelyesen szimmetrikusak, ahogy a 3×4-es téglalap is, ezzel a kívánt felosztást megadtuk. (Lásd a bal oldali ábrát!)

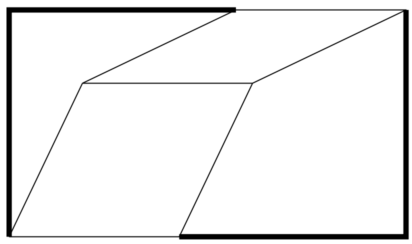
Összesen: 7 pont

2. megoldás

A téglalap egyik belső szögfelezőjén jelöljük meg a csúcshoz legközelebbi olyan pontot, amely 3 egységnyire van a téglalap rövidebb oldalának másik végpontjától. Ezt a csúcsot a szögfelezőre tükrözve , és a megfelelő szakaszokat behúzva egy konkáv deltoidot kapunk, melynek minden oldala vagy 3, vagy 4 egység hosszú. A szemközti csúcsból induló szögfelező segítségével, de ezúttal a csúcstól távolabbi pontot választva hasonló módon egy konvex deltoidot kaphatunk. A két deltoid szimmetriaátlóinak a téglalap csúcsaitól különböző végpontjait összekötve két rombusz keletkezik. Ezzel megkaptuk a kívánt felosztást. (Lásd a jobb oldali ábrát!)

Összesen: 7 pont





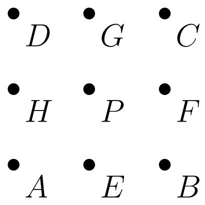
Az ábrákon a vastag vonalak négy, a vékony vonalak három egység hosszú szakaszokat jelölnek.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. A sík minden pontjához hozzárendeltünk egy egész számot úgy, hogy a következő teljesül: ha A, B, C és D egy négyzet csúcsai, akkor a hozzájuk rendelt számok összege nulla. Lehetséges-e, hogy a sík valamelyik P pontjához nem a nullát rendeltük?

Megoldás

A sík tetszőleges P pontját tekintsük egy $ABCD$ négyzet középpontjaként (tetszőlegesen választhatjuk a négyzetet). Az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontja legyen E, F, G, H.



(***1*** pont)

A folytatásban egy ponthoz rendelt számot ugyanazzal a betűvel fogunk jelölni, mint a pontot. Az $AEPH$, $EBFP$, $PFCG$ és $PGDH$ négyzetekre alkalmazva a feltételt:

$$0 = (A + E + P + H) + (E + B + F + P) + (P + F + C + G) + (P + D + G + H)$$
$$0 = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H + 4P$$

(***2*** pont)

Mivel $ABCD$ és $EFGH$ is négyzetek, ezért

$$(A + B + C + D) + 2 \cdot (E + F + G + H) = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H = 0.$$

(***2*** pont)

Emiatt viszont $4P = 0$, azaz $P = 0$. Tehát a hozzárendelés csak olyan lehet, amely bármely P ponthoz a nullát rendeli. (***2*** pont)

Összesen: 7 pont

3. Legyen

$$S = 2019^{2019} + 2019^{2018} + 2019^{2017} + \ldots + 2019^2 + 2019^1 + 1.$$

Mutasd meg, hogy S-nek van háromjegyű prímosztója.

1. megoldás

Mivel $2019^{n+1} + 2019^n = 2020 \cdot 2019^n$, ezért az S összegben bármely két egymást követő tag összege osztható 2020-szal. (***4*** pont)
Mivel S páros számú tagból áll, így S is osztható 2020-szal. (***1*** pont)
Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S-nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen). (***2*** pont)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

Vizsgáljuk meg S osztási maradékát 2020-szal. Mivel 2019 és -1 ugyanolyan maradékot ad 2020-szal, ezért S maradéka megegyezik az

$$S' = (-1)^{2019} + (-1)^{2018} + (-1)^{2017} + \ldots + (-1)^2 + (-1)^1 + 1$$

összeg maradékával. (***3** pont*)

Ez az összeg viszont $-1+1-1+1-1+\ldots-1+1 = 0$, tehát S', és így S is osztható 2020-szal. (***2** pont*)

Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S-nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen). (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Anna egy szabályos hatszög hat csúcsát kiszínezte pirossal, kékkel vagy sárgával úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Ezután Béla behúzott három átlót úgy, hogy a hatszög belsejében nem keletkezett metszéspont, és mindegyik átló két különböző színű csúcsot kötött össze.
Hányféleképpen nézhet ki ezek után az ábra? A forgatással, tükrözéssel egymásba vihető ábrákat **nem** tekintjük különbözőnek.

Megoldás

A három átlót háromféle módon lehet behúzni:

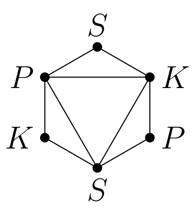
(1) szabályos háromszöget alkotnak;

(2) egy csúcsból indulnak ki;

(3) az egyik átló mindkét végpontjából indul egy-egy további.

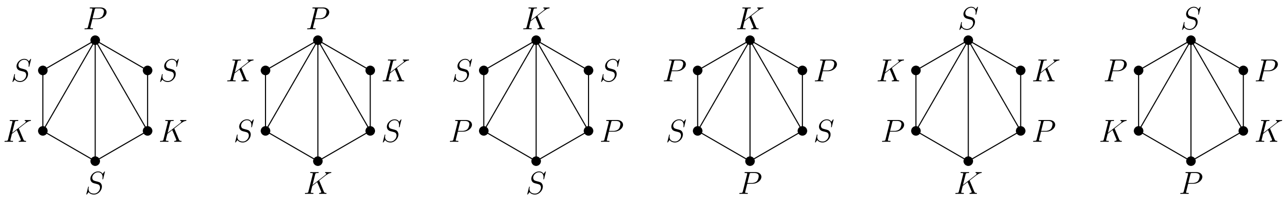
(***1** pont*)

Ha a három átló egy szabályos háromszöget alkot, akkor a végpontjaikat három különböző színnel kell színezni. Ez a színezés a másik három csúcs színét is egyértelműen meghatározza, hiszen nem lehetnek egyszínűek a szomszédaikkal. Minden lehetőséget megkaphatunk az alábbi ábrából tükrözéssel és forgatással, tehát ebben az esetben 1 lehetőség van.



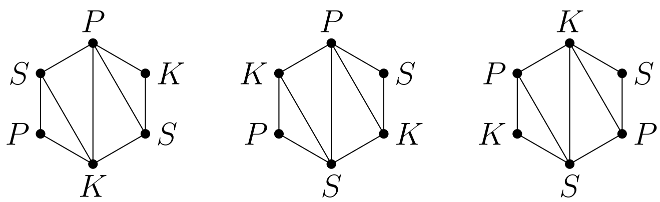
(***1** pont*)

Ha a három átló egy csúcsból indul ki, akkor ennek a csúcsnak a színe különbözik az összes többiétől (hiszen vagy szomszédosak, vagy átló köti össze őket). Ez a szín háromféle lehet. A maradék két színnel a többi csúcsot felváltva kell színezni, így az egyiket háromszor, a másikat kétszer használjuk, ez 2 lehetőség. A színeknek tehát $3 \cdot 2 = 6$ lehetséges kombinációja van. Bármely színezésnél a lehetséges ábrák egymásba forgathatók, így ez az eset 6 lehetőséget ad.



(**2** pont)

Ha az egyik átló mindkét végpontjából indul egy-egy további, akkor tükrözéssel és forgatással elérhető a lenti ábrán látható helyzet. Könnyen látható, hogy a leghosszabb átló két végpontjának a színezése már egyértelműen meghatározza a többi csúcs színét. A leghosszabb átló végpontjait háromféle módon színezhetjük, hiszen két különböző színt kell használni, de a végpontok 180 fokos forgatással felcserélhetők. Így ebben az esetben 3 lehetőség van.



(**2** pont)

Ez összesen $1 + 6 + 3 = 10$ lehetőség. (**1** pont)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Robot Robi a következő számolást végzi: ha megadunk neki egy pozitív egész számot, ő elosztja maradékosan 43-mal, majd összeadja a kapott maradékot és hányadost, és leírja az így kapott számot. Egy napon Robinak sorra az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat adták meg, és ő mindegyikkel elvégezte a fenti számolást. A Robi által leírt 2019 darab szám között hány darab 7-tel osztható van?

1. megoldás

Legyen az N szám esetén a kapott hányados h, a maradék m. Ekkor

$$N = 43 \cdot h + m = 42 \cdot h + (h + m).$$

(***3*** *pont*)

Mivel $42 \cdot h$ biztosan 7-tel osztható, ezért $(h + m)$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha N is osztható 7-tel. (***2*** *pont*)

Tehát Robot Robi éppen annyi 7-tel osztható számot írt le, ahány az 1, 2, 3, ..., 2019 számok között volt. Mivel $2019 = 288 \cdot 7 + 3$, ezért 288 darab 7-tel osztható számot írt le Robi. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Mivel $2019 = 46 \cdot 43 + 41$, ezért a hányadosok 0-tól 46-ig, a maradékok 0-tól 42-ig terjedhetnek. (***1*** *pont*)

Közülük csak két eset nem fordul elő: amikor mindkettő 0, illetve amikor a hányados 46 és a maradék 42. (***1*** *pont*)

Mivel 7-tel osztható összeget akarunk, a hányados 7-tel vett osztási maradéka egyértelműen meghatározza a maradék lehetséges 7-es maradékait. Ez alapján összegyűjthetjük a megfelelő lehetőségeket.

7-es maradék	Hányadosok	Maradékok	Lehetőségek
$0+0$	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	$7 \cdot 7 = 49$
$1+6$	1, 8, 15, 22, 29, 36, 43	6, 13, 20, 27, 34, 41	$7 \cdot 6 = 42$
$2+5$	2, 9, 16, 23, 30, 37, 44	5, 12, 19, 26, 33, 40	$7 \cdot 6 = 42$
$3+4$	3, 10, 17, 24, 29, 38, 45	4, 11, 18, 25, 32, 39	$7 \cdot 6 = 42$
$4+3$	4, 11, 18, 25, 32, 39, 46	3, 10, 17, 24, 29, 38	$7 \cdot 6 = 42$
$5+2$	5, 12, 19, 26, 33, 40	2, 9, 16, 23, 30, 37	$6 \cdot 6 = 36$
$6+1$	6, 13, 20, 27, 34, 41	1, 8, 15, 22, 29, 36	$6 \cdot 6 = 36$

(***4*** *pont*)

A fentiek között szerepel a $(0, 0)$ pár is, ezt ki kell venni. Így a Robi által leírt 7-tel osztható számok száma összesen $49 + 42 + 42 + 42 + 42 + 36 + 36 - 1 = 288$. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.