TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2021. május 29.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. 14 hetedikes focizik, 7 a 7 ellen. Közülük heten járnak fociedzésre, heten nem. Henrik jár fociedzésre, és olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában (vele együtt) többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Megoldás. Henrik úgy tud kialakítani edzésre járó többséget a csapatában, ha maga mellé még hat, öt, négy vagy három olyan tagot választ, akik szintén járnak edzésre.

Henriken kívül még hat ember jár edzésre és hét nem. Nevezzük az első csoportot E halmaznak, a másodikat N halmaznak és számoljuk meg a lehetséges kiosztásokat külön-külön a fentebb felsorolt esetekben.

- Henrik 6 embert választ E-ből és nem választ N-ből. Ez egyetlen módon tehető meg.
- Henrik 5 embert választ E-ből és 1-et N-ből. A hatelemű E halmazból 5-öt hatféle módon választhatunk (aszerint, hogy ki marad ki) és a hételemű N-ből egyvalakit hétféle módon választhatunk. Ezek a választások tetszőlegesen kombinálhatók, ezért most összesen $6 \cdot 7 = 42$ lehetőséget kaptunk.
- Henrik 4 embert választ E-ből és 2-t N-ből. Hatból négyet választani ugyanannyiféle módon lehet, mint hatból kettőt. Általában n elemből kettőt kiválasztani $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$-féle módon lehetséges, mert az első választás n-féle lehet, a második már csak $(n-1)$-féle és a párban a sorrend nem számít, ezért még osztani kell kettővel. Ebben az esetben így N-ből $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ módon választható négy, és N-ből $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ módon választható kettő. Ez összesen $15 \cdot 21 = 315$ lehetőség.
- Henrik 3 embert választ E-ből és 3-at N-ből. Általában n elemből hármat $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$-féle módon választhatunk ki. Az indoklás a fentihez hasonló, csak most már hat lehetséges sorrendje van egy kiválasztott hármasnak, ezért kellett növelni a nevezőt. Ebben az esetben tehát $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 20 \cdot 35 = 700$ lehetőséget kaptunk.

Összegezve $1 + 42 + 315 + 700 = 1058$-féle módon tud Henrik kedve szerinti csapatkiosztást választani.

Megjegyzés. A megoldás tömörebb formában is felírható, ha már ismerjük a binomiális együtthatók fogalmát.

$$1058 = \binom{6}{6} \cdot \binom{7}{0} + \binom{6}{5} \cdot \binom{7}{1} + \binom{6}{4} \cdot \binom{7}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{7}{3} = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 7 + 15 \cdot 21 + 20 \cdot 35$$

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Megadható-e 7 egyenes a síkon úgy, hogy semelyik három ne menjen át egy ponton, és a metszéspontok száma pontosan 16 legyen?

Megoldás. Ha a hét egyenes általános helyzetű lenne, vagyis bármely kettő metszené egymást és semelyik három nem menne át egy ponton, akkor összesen $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$ metszéspontot határoznának meg. Ehhez a maximumomhoz képest egy olyan elrendezést kell keresünk, ahol öttel kevesebb a metszéspontok száma.

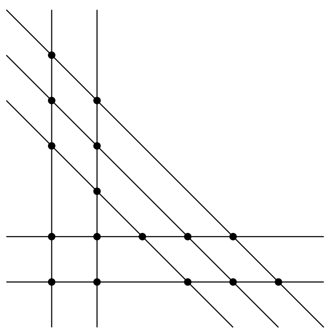
Mivel semelyik három egyenes nem mehet át egy ponton, csak azzal tudjuk csökkenti a metszéspontok számáz (a maximumhoz képest), hogy bizonyos egyeneseket párhuzamosan rajzolunk.

Ha van a darab párhuzamos egyenes és b darab másik egymással párhuzamos, de az eredeti a darabot metsző egyenes, akkor ez az összesen $a + b$ darab egyenes együtt $a \cdot b$ metszéspontot ad ki.

Hasonlóan ha három „párhuzamossági osztályunk” van, amelyek mérete a, b és c, akkor összesen $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$ metszéspont keletkezik.

Ha elkezdjük felsorolni az összes lehetséges módot, ahogy hét egyenes néhány párhuzamossági osztályba sorolható, az derül ki, hogy a 2, 2, 3 felosztás 16 metszésponthoz vezet.

párhuzamossági osztályok mérete	metszéspontok száma
7 (minden egyenes párhuzamos)	0
1, 6	$6 = 1 \cdot 6$
2, 5	$10 = 2 \cdot 5$
3, 4	$12 = 3 \cdot 4$
1, 1, 5	$11 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1$
1, 2, 4	$14 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4$
1, 3, 3	$15 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3$
2, 2, 3	$16 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$



Megjegyzés. A jó konstrukció megtalálásához nem szükséges felsorolni a különböző eseteket. Érvelhetünk úgy is, hogy a maximumhoz viszonyított csökkenést $3 + 1 + 1$ alakban állítjuk elő. Hármat csökkent a maximumon ha három egyenest párhuzamosnak rajzolunk és egyet csökkent, ha két egyenest párhuzamosnak rajzolunk.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Annának van 16 doboza négy színben (sárga, piros, kék, zöld) és méretben (kicsi, közepes, nagy, óriás). Ezeket négyesével egymásba pakolja úgy, hogy minden négyes csoportban minden színből és méretből pontosan egy szerepeljen. Miután minden dobozt becsukott, megérkezünk, és szeretnénk megtudni, hogy a négy óriás doboz közül melyik tartalmazza a kicsi sárga dobozt. Állapítsd meg minél kevesebb doboz kinyitásával, hogy melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz!
Ahhoz, hogy egy dobozt kinyithass, mindegyik nála nagyobb, őt tartalmazó dobozt ki kell nyitnod. A kicsi sárga dobozt tartalmazó dobozt nem muszáj ténylegesen kinyitni. Nem kell indokolni, hogy az általad talált megoldás a lehető legkevesebb kinyitásból áll.

Megoldás. Mutatunk egy olyan módszert, amely három doboz kinyitásával kideríti, melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz.

Először tegyük félre az óriás sárga dobozt, annak belsejében már nem lehet másik (kisebb) sárga doboz. Most nyissuk ki a piros és a kék óriás dobozt. (Ez idáig két nyitás.) Most már látjuk a bennük lévő két nagy doboz színét.

Két eset lehetséges: vagy látunk egy nagy sárga dobozt, vagy nem.

- Ha nem látunk nagy sárga dobozt, akkor biztosak lehetünk, hogy az a másik érintetlen (a zöld) óriás dobozban van, és abban kisebb sárga doboz nem lehet, ezért tegyük azt is félre. A keresett kicsi sárga doboz vagy a kék vagy a piros óriás dobozban van.
- Ha látunk egy nagy sárga dobozt, akkor az őt tartalmazó óriás dobozt is tegyük félre. Most a keresett kicsi sárga doboz vagy az éritetlen zöld óriás dobozban van, vagy a részben már kinyitott és még félre nem tett dobozban.

Mindkét esetben sikerült két óriás dobozra szűkítenünk a lehetőségeket, ráadásul e két doboz közül legalább az egyiket már kinyitottuk.

Végül a megmaradt két doboz közül vegyük az egyik nyitottat (ha csak egy nyitott van, akkor azt) és nyissuk ki az abban lévő nagy dobozt is. Ha most egy sárga közepes dobozt pillantunk meg, akkor tudjuk, hogy a kicsi sárgának a másik megmaradt dobozban kell lennie, és ahhoz már nem kell nyúlnunk. Ha pedig egy nem sárga közepes dobozt látunk, akkor a másik megmaradt dobozban kell lennie a sárga közepesnek (hiszen a korábban félretett dobozok között van a nagy és az óriási sárga), és akkor a kicsi sárgának abban az óriás dobozban kell lennie, amiben pont most nyitottuk ki a nagy dobozt.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Bergengóciában kétféle fizetőeszköz van: garas és tallér. A bergengóc nemzeti bank minden reggel kiírja a két fizetőeszköz közti váltás aznapi arányát (pl: 7 garas = 3 tallér). Andrásnak 1100 garasa és 400 tallérja, Bélának 200 garasa és 1700 tallérja, Csabának 800 garasa és 900 tallérja van.
a) Bizonyítsd be, hogy a bank kiírhat olyan váltási arányt, amelynél Csaba vagyona értékesebb Andrásénál és Béláénál is.
b) Csaba a húgának adott 100 tallért, András és Béla vagyona nem változott. Kiírhat-e most a bank olyan váltási arányt, amelynél hármuk közül még mindig Csaba vagyona a legértékesebb?

Megoldás. Az egyszerűség kedvéért számoljunk forintban és legyen 100 garas g forint, 100 tallér pedig t forint (megengedve, hogy g és t nem feltétlenül egész szám, de feltéve, hogy mindkettő pozitív). A három fiú vagyona forintban kifejezve: $A = 11g + 4t$, $B = 2g + 17t$ és $C = 8g + 9t$.

a) Ha Csaba a leggazdagabb, akkor $C > A$ és $C > B$ is teljesül. Nézzük meg, mit jelent ez g-re és t-re vonatkozóan.

$C = 8g + 9t > A = 11g + 4t \Rightarrow 5t > 3g \Rightarrow \frac{5}{3}t > g$.

$C = 8g + 9t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 8t \Rightarrow g > \frac{4}{3}t$.

A kapott feltételrendszer egy megoldása $t = 2, g = 3$, mert ekkor $C = 8g + 9t = 4200$, $A = 11g + 4t = 4100$ és $B = 2g + 17t = 4000$ és tényleg C a legnagyobb.

Átváltási arányként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy két garas egyenlő három tallérral.

b) **1. megoldás** Most az előző feltételek egy kicsit módosulnak.

$C = 8g + 8t > A = 11g + 4t \Rightarrow 4t > 3g \Rightarrow \frac{4}{3}t > g$.

$C = 8g + 8t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 9t \Rightarrow g > \frac{3}{2}t$. Ez azt jelentené, hogy

$$\frac{4}{3}t > g > \frac{3}{2}t,$$

ami nem lehetséges, hiszen $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ és feltettük, hogy t pozitív, vagyis a pénzeknek van értéke. Tehát a b) feltételnek megfelelő átváltási arány nem létezik.

2. megoldás Tegyük fel, hogy Csaba vagyona a legértékesebb, azaz $C > A$, és $C > B$.

Ekkor az is igaz, hogy $3C > 2A + B$, ami azt jelentené, hogy 2400 garas +2400 tallér > 2400 garas +2500 tallér, ami nem lehetséges.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Az $1, 2, 3, \ldots, 32$ számok közül szeretnék néhányat bekarikázni úgy, hogy egyszerre teljesüljön a következő két feltétel:

(i) nincs a bekarikázott számok közt kettő, melyek közül az egyik 2-szerese a másiknak.

(ii) nem tudok újabb számot bekarikázni úgy, hogy ne legyen a bekarikázott számok közt kettő, amelyek közül az egyik 2-szerese a másiknak.

Hányféleképpen tehetem ezt meg?

Megoldás. Nevezzük *láncnak* az x, $2x$, $4x$, …alakú sorozatokat, ahol $1 \le x \le 31$ egy páratlan egész szám. Az 1,2,3,…,32 számhalmaz felbontható 16 lánc uniójára:

1, 2, 4, 8, 16, 32 (6 szám); 3, 6, 12, 24 (4 szám); 5, 10, 20 (3 szám); 7, 14, 28 (3 szám); 9, 18 (2 szám); 11, 22 (2 szám); 13, 26 (2 szám); 15, 30 (2 szám); és további 8 egyelemű lánc, a 17, …, 31 páratlan számok. Ez a felbontás azért hasznos, mert a kérdéses számok közül csak úgy lehet egy duplája egy másiknak, ha mindketten ugyanahhoz a lánchoz tartoznak.

Emiatt elég minden láncra külön-külön megszámolni a helyes karikázások számát, és a kapott értékek szorzata lesz az összes lehetőség száma, mert két lánc helyes karikázásai tetszőlegesen kombinálhatók egymással.

Az is könnyen látható, hogy egy láncon belül csak a szomszédos elemekre kell figyelni: nem lehet két szomszédos karikázás, és minden karikázatlannak kell lennie karikázott szomszédjának. Tehát csak az érdekes, hogy a lánc hány elemű, az nem, hogy konkrétan melyik számok alkotják.

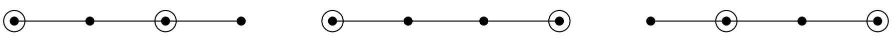
Vegyük sorra a különböző hosszúságú láncokat és jelölje $f(n)$ az n hosszúságú lánc helyes karikázásainak számát.

$\mathbf{n = 1}$. Kötelező bekarikáznunk az egyetlen elemet az (ii) feltétel miatt. $f(1) = 1$

$\mathbf{n = 2}$. A két elem közül pontosan az egyiknek kell bekarikázva lennie, de az szabadon választható, hogy melyiknek. $f(2) = 2$

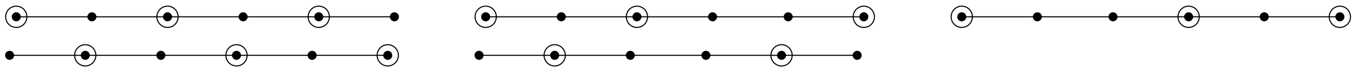
$\mathbf{n = 3}$. Két jó karikázás van tehát $f(3) = 2$:

$\mathbf{n = 4}$. Három jó karikázás van tehát $f(4) = 3$:



$\mathbf{n = 5}$. (A teljesség kedvéért, ilyen láncunk nincs.) Négy jó karikázás van, tehát $f(5) = 4$:

n = 6. Öt jó karikázás van, tehát $f(6) = 5$:



A helyes karikázások egy lehetséges jellemzése: bármely két karikázott között pontosan egy vagy két karikázatlan lehet, továbbá a lánc két szélén legfeljebb egy karikázatlan lehet.

Most már össze tudjuk számolni az eseteket. Van egy hatelemű, egy négyelemű, két háromelemű és négy kételemű láncunk (a maradék nyolc egyelemű láncnál nincs választási lehetőségünk), ezért a helyes karikázások száma

$$f(6) \cdot f(4) \cdot f(3)^2 \cdot f(2)^4 = 5 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 = 15 \cdot 64 = 960$$

Megjegyzés. Bizonyítható, hogy $n > 2$ esetén $f(n) = f(n-2) + f(n-3)$.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap