



48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKÁVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2019. május 24.

NYOLCADIK OSZTÁLY

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény pusztá közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. A sík minden pontjához hozzárendeltünk egy egész számot úgy, hogy a következő teljesül: ha A , B , C és D egy négyzet csúcsai, akkor a hozzájuk rendelt számok összege nulla. Lehetséges-e, hogy a sík valamely P pontjához nem a nullát rendeltük?
2. Legyen
$$S = 2019^{2019} + 2019^{2018} + 2019^{2017} + \dots + 2019^2 + 2019^1 + 1.$$
Mutasd meg, hogy S -nek van háromjegyű prímosztója.
3. Legfeljebb hány kereszt alakú tartomány (egy négyzetből és négy vele oldalszomszédos négyzetből álló alakzat) helyezhető el egy 8×8 -as sakktáblán átfedés nélkül? (A kereszt alakú tartományok nem lóghatnak le a tábláról, és követniük kell a rácsvonalakat.)
4. Robot Robi a következő számolást végzi: ha megadunk neki egy pozitív egész számot, ő elosztja maradékosan 43-mal, majd összeadja a kapott maradékot és hányadost, és leírja az így kapott számot. Egy napon Robinak sorra az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat adták meg, és ő mindegyikkel elvégezte a fenti számolást. A Robi által leírt 2019 darab szám között hány darab 7-tel osztható van?
5. Az egyenlőszárú ABC háromszögbe beírtunk egy DEF háromszöget úgy, hogy D az AB oldalon, E az AC oldalon és F a BC oldalon van. Tudjuk, hogy $AD = AE$, $BD = BF$ és $DFCE$ egy deltoid. Bizonyítsd be, hogy a DEF háromszög egyenlőszárú! (Sem a $DFCE$ deltoidnál, sem az ABC , sem a DEF háromszögnél nem adtuk meg, hogy melyek az egyenlő oldalak.)

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Károl, Steller Gábor.

Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.

Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.