TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

ORSZÁGOS DÖNTŐ 2. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Minden feladat teljes megoldása 7 pont

1. Bontsd fel a 13157-et négy szám összegére úgy, hogy ha az első részhez 2-t hozzáadunk, a második részből 3-at elveszünk, a harmadik részt 7-tel megszorozzuk, a negyedik részt 11-gyel elosztjuk, akkor mindig ugyanazt a számot kapjuk!

Megoldás:

A részeket jelöljük rendre a-val, b-vel, c-vel és d-vel. Ekkor felírhatjuk a következő egyenleteket:

$I. \quad a+b+c+d=13157$

$II. \quad a+2=b-3=c\cdot 7=\frac{d}{11}$

A II-ben szereplő mennyiségek közös értéke legyen x. Ennek segítségével ki tudjuk fejezni a többi ismeretlent. Tehát $a=x-2,\ b=x+3,\ c=\frac{x}{7},\ d=11\cdot x$.

Helyettesítsük be ezen értékeket az I-es egyenletbe!

$(x-2)+(x+3)+\frac{x}{7}+11\cdot x=13157$ Rendezzük:

$\frac{92}{7}x+1=13157$

$\frac{92}{7}x=13156$

$x=1001$

Így a = 999, b = 1004, c = 143, d = 11011.

Ellenőrzés: Ezek összege 999+1004+143+11011=13157.

2. Egy tíz résztvevős asztalitenisz versenyen mindenki pontosan egyszer mérkőzött mindenkivel. Az egyes versenyzők győzelmeinek száma $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, vereségeinek száma rendre $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Bizonyítsd be, hogy a versenyzők által szerzett győzelmek száma négyzetének összege ugyanannyi, mint a vereségek száma négyzetének összege.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Megoldás:

Egy ilyen versenyen mindenki pontosan 9 mérkőzést játszik. Ha tíz csapat volt ezen a körmérkőzéses versenyen, akkor $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ mérkőzésre került sor, vagyis $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=45$. Asztaliteniszben nincs döntetlen, tehát egy mérkőzést valaki megnyert, a másik pedig elvesztette.

Ha valaki a mérkőzést nyert, akkor $9-a$ -t elvesztett. Ezek alapján

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2+j^2=$$
$$=(9-a)^2+(9-b)^2+(9-c)^2+(9-d)^2+(9-e)^2+(9-f)^2+(9-g)^2+(9-h)^2+(9-i)^2+(9-j)^2$$

Végezzük el a jobb oldalon a kijelölt műveleteket:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2+j^2=$$
$$=81\cdot 10-18\cdot(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j)+a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2+j^2$$

De $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=45$, és $18\cdot 45=810$, s ezzel beláttuk állításunk helyességét.

3. Keress olyan prímszámokat, amelyekre igaz, hogy alkalmas számrendszerben felírva a számrendszer minden számjegyét pontosan egyszer használjuk fel? (0 nem állhat elől!) Igazold, hogy a hetes, illetve a tízes számrendszerben nincs ilyen szám.

Megoldás

Csak a 2, 11 és 19 rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. A kettes számrendszerben $2_{10}=10_2$. A hármas számrendszerben: $11_{10}=102_3$, $19_{10}=201_3$.

Általánosítás: Megmutatjuk, hogy a feladatnak nincs több megoldása, ha a számrendszer alapszáma nagyobb háromnál ($g>3$).

Tegyük fel, hogy $p_{10}=a_m a_{m-1}...a_{0_g}$ **(1)**. Itt p egy tízes számrendszerbeli prímszám, a_m, a_{m-1}, $\dots a_0$ pedig a g alapú számrendszer számjegyei valamilyen sorrendben.

Fel kell használnunk a következő tételt, amelyet sem megnevezni, sem megfogalmazni nem kell a versenyzőknek, de n valamilyen módon utalni kell.

Tetszőleges számrendszerben az alapszám kisebb szomszédjával és annak osztóival való oszthatóság szabálya. A g alapú számrendszerben egy szám akkor és csak akkor osztható

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

$g-1$-gyel (vagy annak osztóival), ha a számjegyek összege osztható $g-1$-gyel (vagy annak osztóival).

Külön vizsgáljuk a páros és a páratlan alapú számrendszereket.

I. eset: Legyen $g=2k \quad (k>1)$. Ekkor a felhasznált számjegyek összege

$$0+1+2+3+...+(2k-1)=\frac{(2k-1)2k}{2}=(2k-1)k$$

A jobb oldal osztható az alapszám kisebbik szomszédjával $(2k-1)$-gyel, ezért az (1) bal oldala is. A k > 1 feltétel miatt (1) bal oldala összetett szám, vagyis nem prím.

II. eset: Legyen $g=2k+1 \quad (k>1)$. Ekkor a felhasznált számjegyek összege:

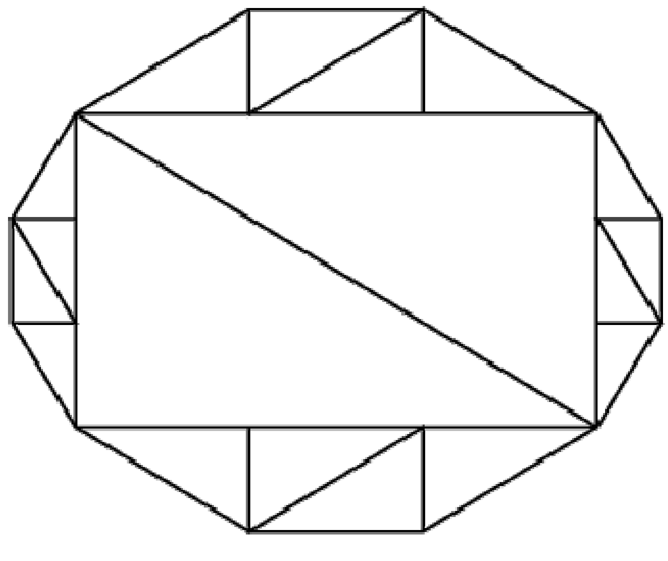
$1+2+...+2k=\frac{(2k+1)2k}{2}=(2k+1)k$. A $g=2k+1$ alap kisebbik szomszédja most 2k, ennek osztója k. Mivel $k>1$, ezért az (1) jobb oldalán szereplő számjegyösszeg osztható k-val, így a bal oldal is osztható k-val. A bal oldalnak van még legalább egy valódi osztója, mert k > 1 esetén 2k + 1 > 2, tehát a bal oldalon nem állhat prímszám, csak összetett.

Megjegyzés: Az eredeti feladat a tízes számrendszerre vonatkozó állítása a fentiektől függetlenül könnyen elvégezhető. A hetes számrendszeres rész igazolásához kell a fenti ismeret. Látható, hogy a feladat alkalmas általánosításra.

4. Legfeljebb hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak? (Megjegyzés: a feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem)

Megoldás:

Tegyük fel, hogy egy konvex sokszög feldarabolható a kívánt módon. Mivel a felosztásban szereplő háromszögek minden szöge 30^{o} egész számú többszöröse, ugyanez igaz a sokszög minden egyes szögére, vagyis azok legfeljebb 150^{o}-os szögek lehetnek.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Ennek megfelelően a sokszög minden külső szöge legfeljebb 30^o-os. Mivel ezek összege 360^o, a sokszögnek legfeljebb 12 oldala lehet.

Az ábrán egy megfelelő 12 oldalú sokszöget láthatunk. Ez úgy keletkezett, hogy először két megfelelő egybevágó háromszöget egy téglalappá illesztettünk össze. Ezután a hosszabbik oldalak fölé harmad ekkora háromszögekből összerakott szimmetrikus trapézokat illesztettünk, és hasonlóképpen jártunk el a rövidebb oldalakat illetően is.

Megjegyzés: 12-nél kevesebb oldalú idom is felbontható ilyen háromszögekre. Pl. bizonyos téglalapok, háromszögek, hatszögek, de a legnagyobb oldalszámot keressük.

5. Bizonyítsd be, hogy minden természetes szám előállítható $a^2 + b^2 - c^2$ alakban, ahol a, b, c egész számok!

Megoldás:

I. Segédállítás: A páratlan természetes számok előállíthatók két négyzetszám különbségeként. Tegyük fel, hogy $2n+1 = a^2 - c^2$. A jobboldalt alakítsuk szorzattá $2n+1 = (a+c)\cdot(a-c)$. A baloldalt szorzattá bontjuk triviális módon: $2n+1 = 1\cdot(2n+1)$. A két utóbbi egyenlőségnél a baloldalak megegyeznek, ezért a jobboldalaknak is meg kell egyezni, így csak a következő társítás jöhet szóba: az $(a-c) < a+c$ miatt, csak az lehet, hogy $a-c=1$ és $a+c=2n+1$. Ennek megoldása: $a = n+1, \quad c = n$. És valóban $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. Tehát a páratlan számok mindegyike előállítható a kívánt módon, itt minden esetben $b=0$ választás kell.

A párosaknál elegendő annyit tennünk, hogy az 1-gyel kisebb páratlan szám előállításához még hozzáadunk 1-et. Tehát $2n+2 = (n+1)^2 + 1^2 - n^2$

II. Némi algebrai előismerettel a tanuló egyből felírhatja, hogy minden páratlan természetes szám előállítható a két egymást követő négyzetszám különbségeként: $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. Innen a párosak esetén még 1-et hozzá kell adni.