TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

42 . ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ 1. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Minden feladat teljes megoldása 7 pont

1. Egyszer két juhász így beszélgetett:

- Adj nekem 8 bárányt, akkor nekem is annyi lesz, mint neked!

- Inkább te add nekem a bárányaid felét, s akkor nekem 7-szer annyi lesz, mint neked.

Hány báránya volt egyik-egyik juhásznak?

Megoldás:

Az első feltételből következik, hogy az egyik juhásznak x, a másiknak x - 16 bárány van.

A második feltételből következik:

$$x+\frac{x-16}{2}=7\cdot\frac{x-16}{2}$$

$$x=3(x-16)$$

$$2x=48$$

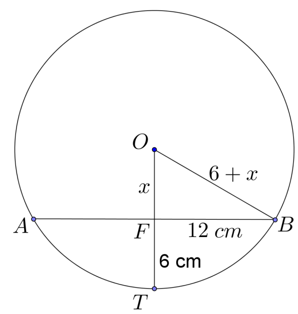
$$x=24$$

Tehát az egyik juhásznak 24, míg a másiknak 8 báránya van.

2. A tavon úszott egy labda, majd a tél beálltával befagyott a tó vize, s befagyott a labda. A labdát sikerült eltávolítani, így visszamaradt egy 24 cm átmérőjű, 6 cm mély "lyuk". Mennyi a labda sugara? (Feltételezzük, hogy a labda gömb alakú, gumiból készült és belül üres! A labda középpontja a víz felszíne felett volt.)

Megoldás:

Feltételezhetjük, hogy a labda kisebbik része van a jégben. Az ábrán az AB szakasz jelöli a "lyuk" átmérőjét. Az AB szakasz felezőpontja legyen F, a labda középpontja O. Az OF szakasz hossza x. Az OFB háromszögre írjuk fel a Pithagorasz tételt: Az ábra jelölései alapján $x^2+12^2=(6+x)^2$.



Végezzük el a kijelölt műveleteket:

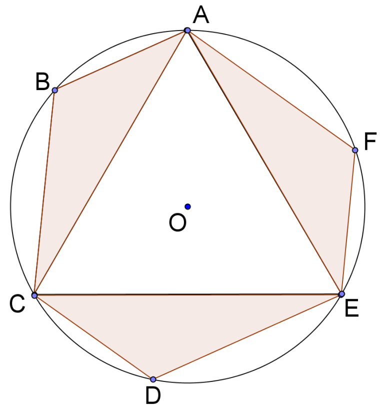
$x^2 + 144 = 36 + 12x + x^2$

$108 = 12x$, ahonnan $x = 9$.

Tehát a labda sugara 15 cm.

3. Egy körbe írható hatszögnek 6 darab 120°-os szöge van. Következik-e ebből, hogy a sokszög szabályos?

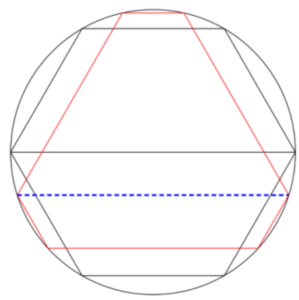
I. Megoldás:



Nem következik. Mutatunk egy megfelelő konstrukciót. Írjunk egy körbe egy szabályos háromszöget! Legyen ez ACE háromszög. Vegyük fel a kör kerületén a B, D és F pontokat úgy, hogy az ABC, CDE és EFA háromszögek egybevágók legyenek! Az ábrán lévő B, D és F csúcsoknál lévő szögek legyenek 120 fokosak. (ABCE, ACDE és ACEF négyszögek húrnégyszögek, de ennek tudását nem várjuk el). Így $BAC_{\angle} + BCA_{\angle} = 60°$.

Hasonló állítások írhatók fel a másik két egybevágó háromszög esetén. Innen egyszerű belátni, hogy $BAC_{\angle} + FAE_{\angle} + 60° = 120°$. Ez azt jelenti, hogy sikerült egy olyan hatszöget készítenünk, amelynek minden szöge 120 fokos, és mégsem szabályos.

II. Megoldás:



Induljunk ki egy szabályos hatszögből. Egy átmérő hosszú átlójával húzzunk párhuzamos húrt (kék szaggatott). Ennek a húrnak a végpontjaiban mérjünk fel a húr mindkét oldalán 60 fokokat, és a kapott félegyeneseket a körig hosszabbítsuk meg. Így két 60-60-120-120 fokos szögekkel bíró húrtrapézból összeáll a hatszög (piros), szögei 120 fokosak és nyilván nem szabályos.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

4. Dudley Langford skót matematikus tiszteletére nevezzük DudLa számoknak azokat a számokat, amelyeknek minden számjegye legalább kétszer szerepel a számban, és az is igaz, hogy bármely két ugyanolyan értékű számjegy között annyi darab más értékű számjegy áll, mint amennyi azok értéke. Például ilyen DudLa szám a 723 121 327, mert két 1-es között 1 db, két 2-es között 2 db, két 3-as között 3 db, két 7-es között 7 db tőle különböző értékű számjegy áll. Ebben a számban 3 darab 2-es van, a két szélső kettesre nem vonatkozik a szabály!!! Melyek a hétjegyű DudLa számok?

Megoldás:

A keresett számokban 5-nél nagyobb számjegy nem szerepelhet, mert két számjegy között nem lehet 5-nél több számjegy. Továbbá, mivel hét számjegy van, és minden számjegy legalább kétszer szerepel, ezért van egy számjegy, ami legalább 3-szor is szerepel és csak egy ilyen van (ez a számjegy csak a 0, az 1 vagy a 2 lehet). A próbálgatások során aszerint haladhatunk, hogy mi a legnagyobb számjegye a felírandó számnak, továbbá aszerint, hogy melyiket tudjuk legalább 3-szor szerepeltetni. Így az alábbi lehetőségeket kapjuk: 5000005, 5300035, 4000141, 1410004, 1312132, 2312131, 2312132.

Hatjegyű DudLa szám 312132, nyolcjegyű 41312432

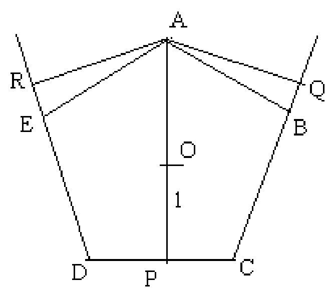
5. Az ABCDE szabályos ötszög. Az A csúcsból állítsunk merőlegeseket a BC, CD és DE oldalak egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre Q, P és R. Legyen O az ötszög köré írható kör középpontja. Ha OP = 1, akkor mivel egyenlő $AO + AQ + AR$?

Megoldás:

Ötlet: ha szakaszok hosszáról akarunk valamit megtudni, akkor gyakran áttérünk területek vizsgálatára.

Húzzuk be az AD és az AC átlókat! Az ötszög területét kétféleképpen fogjuk felírni. Egyszer felírjuk középponti háromszögek segítségével, majd az APC, ABC illetve AED háromszögek területösszegéből. Tehát:

$$\frac{DC \cdot OP}{2} \cdot 5 = \frac{ED \cdot AR}{2} + \frac{DC \cdot AP}{2} + \frac{BC \cdot AQ}{2}$$



Használjuk fel a feladat feltételeit!

$$\frac{DC \cdot 1}{2} \cdot 5 = \frac{DC \cdot AR}{2} + \frac{DC \cdot (OA+1)}{2} + \frac{DC \cdot AQ}{2}$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket, osztunk DC-vel, szorzunk 2-vel:

$5 = AR + OA + 1 + AQ$, tehát $4 = AR + OA + AQ$.