Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ 2. forduló

NYOLCADIK OSZTÁLY - MEGOLDÁSVÁZLATOK

1. Anna kétszer annyi idős, mint amilyen Bea volt akkor, amikor Anna olyan idős volt, mint Bea most. De amikor Bea olyan idős lesz, mint Anna most, életkoruk összege 135 lesz. Milyen idős most Anna, illetve Bea?

Megoldás:

Legyen Bea most B éves.

1.	Múlt	Jelen	Jövő	Életkor
Anna	B	B+x	B+2x	45
Bea	B-x	B	B+x	60

A táblázat és a szöveg (Anna kétszer annyi idős, mint amilyen Bea volt akkor, amikor Anna olyan idős volt, mint Bea most.) alapján felírhatjuk a következő egyenleteket: $\left(b+x\right)=2\cdot\left(b-x\right) \;\Rightarrow\; b=3x$ (I.)

Továbbá (De amikor Bea olyan idős lesz, mint Anna most, életkoruk összege 135 lesz.) : $\left(b+x\right)+\left(b+2x\right)=135 \;\Rightarrow\; 2b+3x=135$ (II.)

(I.)-et és (II.)-őt megoldva $9x=135 \;\Rightarrow\; x=15$ és $b=45$.

Tehát jelenleg Bea 45 éves, Anna pedig 60,

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott értékek helyességéről.

2. Bizonyítsátok be, hogy bármely háromszög súlyvonalainak összege nagyobb, mint a háromszög kerületének $3/4$ része!

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

1. **megoldás**:

Legyenek az ABC háromszög oldalai hossza a, b és c. A hozzájuk tartozó súlyvonalak hossza rendre $s_a,\ s_b,\ s_c$. Tudjuk, hogy a súlypont a súlyvonalat harmadolja, a nagyobbik rész a csúcs felől van. Az ABC háromszög csúcspontjait összekötve a háromszög S súlypontjával három háromszöget kapunk, melyekre felírhatók a háromszög-egyenlőtlenségek:

$$\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c$$

$$\frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a$$

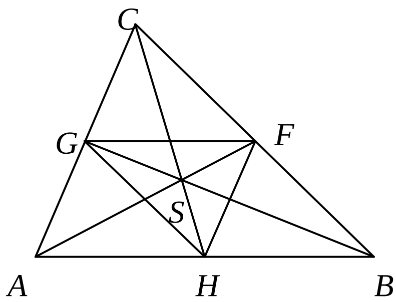
$$\frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b$$

Adjuk össze ezt a 3 egyenlőtlenséget: $\frac{4}{3}\left(s_a + s_b + s_c\right) > a + b + c$.

Átrendezve kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget $s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}\left(a + b + c\right)$.

2. **megoldás**

Ez a megoldás a háromszögek középvonalára vonatkozó ismeretet használja fel. Az ábra jelöléseit használva írjuk fel a következő háromszög-egyenlőtlenségeket:



AS+SB > AB	FS+SG > FG = AB / 2
BS+SC > BC	GS+SH > GH = BC / 2
CS+SA > CA	HS+SF > HF = CA / 2

Összeadva mind a hat egyenlőtlenség megfelelő oldalain álló kifejezéseket:

$$2(AS + FS + BS + GS + CS + SH) > \frac{3}{2}(AB + BC + CA),$$

Felhasználjuk, hogy AS + FS = s_a, BS + GS = s_b és CS + SH = s_c

$$2\,(s_a + s_b + s_c) > \frac{3}{2}(a + b + c)$$

amit 2-vel osztva az eredeti állítást kapjuk.

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

3. Az $\overline{\text{abcdef}}$ és $\overline{\text{fdebca}}$ hatjegyű számok különbsége osztható 271-gyel. Bizonyítsátok be, hogy b = d és c = e !

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy a 271 prímszám.

Bontsuk fel mindkét hatjegyű számot helyi értékesen!

$\overline{\text{abcdef}} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$, illetve

$\overline{\text{fdebca}} = 100000f + 10000d + 1000e + 100b + 10c + a$. E kettő különbsége a feladat feltétele miatt osztható 271-gyel: $99999(a - f) + 9900(b - d) + 990(c - e)$. Mivel a 99999 osztható 271-gyel, ezért kell, hogy az összeg fennmaradó tagja a $9900(b - d) + 990(c - e)$ is osztható legyen 271-gyel.

Kiemelve a 990—t: $9900(b - d) + 990(c - e) = 990\left[10(b - d) + c - e\right]$, ahol a 990 nem osztható 271-gyel, ezért a szögletes zárójelben lévő összegnek 271 többszörösének kell lennie. Mivel b, d, e és f egyaránt számjegyek, ezért a zárójelben levő összeg értéke -99 és 99 között van, így csakis 0 lehet, ami azt jelenti, hogy b = d és c = e, s ezt akartuk bizonyítani.

4. Egy kör kerületére kilenc egész számot írunk, amelyek összege 90. Bizonyítsuk be, hogy van négy egymás melletti szám, amelyek összege legalább 40.

1. megoldás:

Legyenek a számok *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* - ebben a sorrendben. Bizonyítsunk indirekt: tegyük fel, hogy bármely 4 egymás melletti szám összege kisebb, mint 40. Ekkor:

$(a + b + c + d) + (b + c + d + e) + (c + d + e + f) + \ldots + (i + a + b + c) < 9 \cdot 40$.

Innen: $4 \cdot (a + b + c + d + e + f + g + h + i) < 360$. Felhasználva a feltételt: $4 \cdot 90 < 360$, ami ellentmondás. Tehát kiinduló feltevésünk nem lehet igaz, vagyis van 4 egymás melletti szám, melyek összege legalább 40.

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

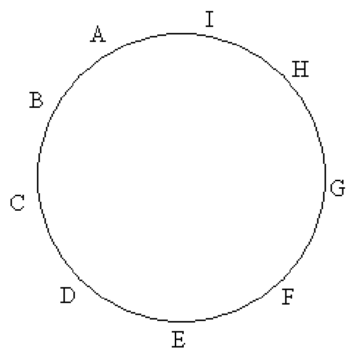
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

2. megoldás:

Tegyük fel, hogy nincs négy egymás melletti szám, amelynek az összege legalább 40, vagyis $A+B+C+D<40$

$A+B+C+D+E+F+G+H+I=90$.

Tehát: $E+F+G+H+I>50$ $E+F+G+H<40$ mivel nem lehet négy egymás melletti szám összege legalább 40. Tehát $I>10$ ezt le lehet vezetni az összes számra:



$A>10$, $B>10$, $C>10$, $D>10$, $E>10$, $F>10$, $G>10$, $H>10$, $I>10$ Ez nem lehet, mert $A+B+C+D+E+F+G+H+I=90$ és ez esetben ez az összeg nagyobb lenne, mint 90. Tehát a feltevés hamis, és a feladat állítása igaz.

5. Mivel egyenlő az A és B átlaga (számtani közepe), ha

$$\mathrm{A}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+...+\frac{1}{2013\cdot 2014} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{B}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{2014\cdot 2015}?$$

Megoldás:

Vegyük észre, hogy mindkét kifejezésben 1007 tag szerepel. Adjuk össze A és B megfelelő sorszámú tagjait!

Az első tagok összege: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}$.

A második tagok összege: $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$.

A harmadik tagok összege: $\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$.

Az utolsó tagok összege:

$$\frac{1}{2013\cdot 2014}+\frac{1}{2014\cdot 2015}=\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)+\left(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}.$$

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Az egyenlőségek jobboldalait összegezzük:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}.$$

Tehát A és B számtani közepe $\frac{1007}{2015}$.

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014