
Kalmár László (matematikus)

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

**43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY**
**ORSZÁGOS DÖNTŐ 1. forduló**

**NYOLCADIK OSZTÁLY- MEGOLDÁSVÁZLATOK**

1. A 2014-et felírtuk három természetes szám összegeként úgy, hogy ha az első számot elosztjuk a másodikkal, akkor hányadosként és maradékként is 8-at kapunk. Ha pedig a harmadik számot osztjuk az elsővel, akkor a hányados 6, a maradék pedig 20. Mivel egyenlő ez a három természetes szám?

**Megoldás**:
Legyen x az első szám, a második y és a harmadik z. Felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$x + y + z = 2014$ (I)

$x : y = 8$
8 azaz $x = 8 \cdot y + 8$, illetve (II)

$z : x = 6$
20 azaz $z = 6 \cdot x + 20$. (III)

E két egyenlőségből: $z = 6 \cdot (8 \cdot y + 8) + 20$, tehát $z = 48 \cdot y + 68$.

Helyettesítsünk (I)-be:. (8y+8) + y + (48y +68) = 2014

Végezzük el az összevonásokat:

$57 \cdot y + 76 = 2014$, ahonnan $y = 34$, $x = 280$, $z = 1700$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott számok helyességéről.

Elképzelhető, hogy a tanulók jelentős része nem ír egyenleteket, csak a mennyiségi viszonyokat ragadják meg és abból okoskodják ki az eredményt. Ez is 7 pont, ha jó megoldást kap.

2. Legyenek x és y egész számok, továbbá $x \geq 0$. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az $2x^2 - 2xy + y^2 = 289$ egyenletet?

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

**Megoldás:**

Képezzünk teljes négyzetet $2x^2-2xy+y^2=(x-y)^2+x^2=289$. Ennek az a tartalma, hogy két négyzetszám összege 289.

Írjuk fel 289-ig a négyzetszámokat: 0;1;4;9;16;25;36;49;64;81;100;121;144;169;196;225;256;289
A négyzetszámok végződéseinek összegét figyelembe véve adódik, hogy

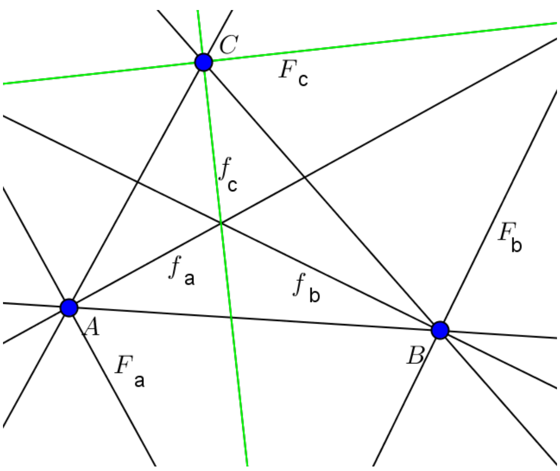
$289=17^2=0^2+17^2=8^2+15^2=15^2+8^2=17^2+0^2$.

Mivel $x\geq 0$ és x és y egész számok, ezért a következő rendezett (x; y) számpárok teszik igazzá az egyenletet: (17; 17), (15;7), (15; 23), (8; 23), (8; -7), (0; 17), (0;-17). Tehát 7 ilyen számpár teszi igazzá az egyenletet.

3. Rajzold meg egy háromszög három belső és három külső szögének felezőjét. Ezen hat egyenes közül melyik kettő lehet merőleges egymásra?

**Megoldás:**

Az **egy csúcsból induló belső és külső** szögfelezők merőlegesek egymásra, mert az általuk felezett szögek összege $180°$. Számítással: ha a belső szög $\alpha$, akkor a hozzátartozó külső szög $180°-\alpha$. A két félszög összege $\frac{\alpha}{2}-\frac{180°-\alpha}{2}=90°$.



Ezeken kívül semelyik más párosításban nem lehetnek merőlegesek egymásra.

**Két belső** szögfelező nem lehet merőleges egymásra, mert akkor az általuk felezett szögek felének összege is derékszög lenne, azaz a két szög összege $180°$ lenne, ami nem lehet, mert akkor a két oldal párhuzamos lenne.

**Két külső** szögfelező sem lehet merőleges egymásra, hiszen a külső szögfelező merőleges a megfelelő belső szögfelezőre, azaz ha lenne két merőleges külső szögfelező, akkor az ezekhez tartozó belső szögfelezőknek is merőlegeseknek kellene lenniük (egy négyzetet zárna közre a négy egyenes).

**Egy külső és egy vele nem azonos csúcsból induló belső** szögfelező nem lehet merőleges egymásra, mert akkor a külsőhöz tartozó belső szögfelező szintén merőleges erre, s ez párhuzamos lenne egy másik belső szögfelezővel, ami nyilván nem lehet. Másként kifejezve: a külső szögfelezőre két belső szögfelező is merőleges lenne, vagyis két belső szögfelező párhuzamos lenne, ami lehetetlen.

4. Legyen $p$ ötnél nagyobb prímszám. Igazold, hogy a $(p-2)\cdot(p-1)\cdot(p+1)\cdot(p+2)$ szorzat osztható 360-nal.

**Megoldás:**

$360 = 8\cdot 9\cdot 5$, tehát a 360-nal való oszthatóság elégséges feltétele, hogy a szám osztható legyen 8-cal, 9-cel és 5-tel, mert ezek a számok relatív prímek.

A "$p$ ötnél nagyobb prímszám" feltétel miatt $p-1$ és $p+1$ két egymást követő páros szám, tehát közülük az egyik 4-gyel is osztható, tehát a $(p-2)\cdot(p-1)\cdot(p+1)\cdot(p+2)$ szorzat osztható 8-cal.

A $p-2$, $p-1$, $p$ valamint $p$, $p+1$, $p+2$ három-három egymást követő természetes szám, tehát van köztük egy-egy 3-mal osztható. Mivel $p$ nem osztható 3-mal, ezért $p-2$, $p-1$ illetve $p+1$, $p+2$ közül egy-egy osztható 3-mal. Tehát az adott kifejezés osztható 9-cel.

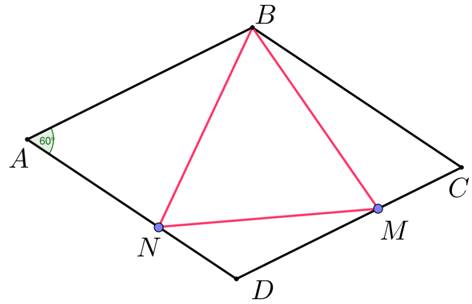
A $(p-2)\cdot(p-1)\cdot p\cdot(p+1)\cdot(p+2)$ szorzatban öt egymást követő természetes szám szerepel, tehát valamelyik osztható 5-tel. Ez nem lehet $p$ a feladat feltétele miatt, tehát az adott szorzat osztható 5-tel is. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Kalmár László (matematikus)

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

5. Az ABCD rombusz A csúcsnál lévő szöge $60°$. A rombusz AD oldalának belsejében felvettünk egy N pontot, a DC szakasz belsejében pedig egy M pontot. Igazoljátok, hogy ha a BMN háromszög valamelyik szöge $60°$, akkor a BMN háromszög szabályos.




**1. megoldás:**

Két eset lehetséges:

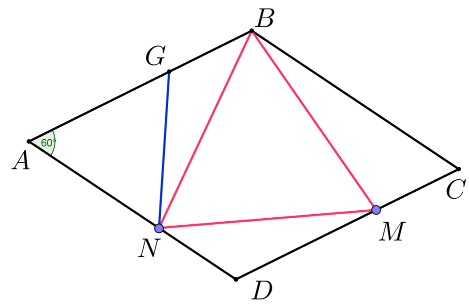
a) Ha az NBM szög $60°$-os.

Tudjuk, hogy a rombuszunk AD oldala egyenlő hosszú a BD átlóval. Az ABN szög egyenlő nagyságú a DBM szöggel, mert mindkettőt az NBD szög egészíti ki $60°$-ra. Ezek alapján az ANB és a DMB háromszögek egybevágók, mert egy oldalban (AB=BD) és A rajta fekvő két szögben megegyeznek, ami azt jelenti, hogy $\mathrm{BN} = \mathrm{BM}$. Tehát az NBM háromszög egy olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek a szárai $60°$-os szöget zárnak be. Tehát a másik két szöge is $60°$-os. Ezt akartuk bizonyítani.

b) Ha a BNM szög $60°$-os.

Az N ponton át húzzunk párhuzamost a BD átlóval. Így az ANG háromszög egy szabályos háromszög lesz. Megmutatjuk, hogy a GBN és az NDM háromszögek egybevágók. Az $NGB\measuredangle = NDM\measuredangle = 120°$.

A$GBN\measuredangle = 180° - (120° + GNB\measuredangle)$, az $MND\measuredangle = 180° - (60° + 60° + GNB\measuredangle)$. Tehát a két háromszög szögei egyenlők. Az oldalaik közül a GB és az ND egyenlő, mert $\mathrm{GB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AG}$, illetve $\mathrm{ND} = \mathrm{AD} - \mathrm{AN}$, s a felírt egyenlőségekben a jobboldalak egyenlők.




Beláttuk, hogy $GBN\,\triangle \cong NDM\,\triangle$, amiből az következik, hogy $\mathrm{NB} = \mathrm{NM}$, s újra találtunk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek a szárai $60°$-os szögez zárnak be, tehát szabályos.


Kalmár László (matematikus)

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

**2. megoldás:**

Megoldás forgatással: forgassuk el az N pontot B körül +60°-kal. Mivel az AD szakasz képe ennél a forgatásnál a DC szakasz, ezért az N' képpont a DC szakaszon van, a BNN' háromszög pedig szükségszerűen szabályos. Ugyanígy az M pontot B körül –60°-kal forgatva a kapott M' pont az AD szakaszon van, és BMM' háromszög szabályos.

Ha NBM szög 60°-os, akkor MBN' szögre 0° marad, tehát M = N'. Így a BMN háromszög megegyezik BN'N háromszöggel, tehát szabályos.

Ha BMN szög 60°-os, akkor az M'MN szög-re marad 0°, tehát M' = N. Így a BMN háromszög megegyezik BMM' háromszöggel, tehát szabályos.

Ha pedig BNM szög 60°-os, akkor az N'NM szög-re marad 0°, tehát N' = M. Így a BMN háromszög megegyezik BN'N háromszöggel, tehát szabályos.

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014