TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Vegyük az egész számokat 1001-től 2000-ig, és mindegyiknek keressük meg a legnagyobb páratlan osztóját. Mennyi az így kapott 1000 darab szám összege?

Első megoldás

Bebizonyítjuk, hogy a feladatban szereplő 1000 darab szám legnagyobb páratlan osztói éppen az 1, 3, ..., 1999 számok lesznek valamilyen sorrendben. (***1** pont*)

Vegyük észre, hogy a felsorolt számok éppen 1000-en vannak, és csak közülük kerülhet ki a legnagyobb páratlan osztó, ezért elég belátni, hogy a felsorolt 1000 szám legnagyobb páratlan osztója csupa különböző szám. (***2** pont*)

Ehhez vegyük észre, hogyha az x szám a legnagyobb páratlan osztója n, akkor a szám felírható $2^k \cdot n$ alakban. Valóban, ha x/n nem lenne kettőhatvány, akkor lenne egynél nagyobb páratlan osztója, mondjuk y és így $n \cdot y$ is páratlan osztója lenne x-nek, ami n-nél nagyobb, és ez ellentmondás. Ez pedig azt jelenti, hogy ha két számnak ugyanaz a legnagyobb páratlan osztója, akkor a hányadosuk egy kettőhatvány, de az adott 1000 szám közül még a legnagyobb és a legkisebb hányadosa is kisebb, mint 2. (***3** pont*)

Így nincs más hátra, mint összeadni a páratlan számokat 1-től 1999-ig: az eredmény 1 000 000. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Második megoldás

Teljes indukcióval bizonyítjuk a következő állítást: az $n+1$, $n+2 \dots 2n$ számok legnagyobb páratlan osztói az $1, 3, 5, \dots 2n-1$ számok valamilyen sorrendben. (***2** pont*)

$n = 1$ esetén igaz az állítás: a 2 legnagyobb páratlan osztója az 1. (***1** pont*)

Tegyük fel, hogy valamilyen n-re már bizonyítottuk az állítást, és nézzük meg, mi változik, amikor eggyel nagyobb n-re térünk át.

$$n+1, n+2, \ldots, 2n$$
$$n+2, \ldots, 2n, 2n+1, 2n+2 = 2(n+1)$$

Kimarad az $n+1$, bejön helyette a $2n+1$ és a $2n+2$. Utóbbi legnagyobb páratlan osztója ugyanannyi, mint $n+1$ legnagyobb páratlan osztója, tehát annyi változott, hogy belépett a $2n+1$ legnagyobb páratlan osztója, ami nyilvánvalóan $2n+1$. Ez pedig igazolja az állításunkat az eggyel nagyobb n értékre is, hiszen eddig 1-től $(2n-1)$-ig kaptuk meg a páratlan számokat, és ehhez jött most hozzá a $2n+1$. (***3** pont*)

Nincs más hátra, mint összeadni a páratlan számokat 1-től 1999-ig: az eredmény 1 000 000. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Harmadik megoldás vázlata

Ha a teljes indukciós módszer még nem megy, akkor „direkt” módon is végigvihető a számolás, csak kicsit munkásabban. Egy menetben mindig kiválogatjuk a páratlan számokat (ezek kerülnek az összegbe) és a következő menetre megtartjuk a páros számok felét. (A felezés nem változtatja meg a legnagyobb páratlan osztót.)

megmaradt számok	a páratlanok	következő menetre marad
$1001, 1002, \ldots, 2000$	$1001, 1003, \ldots, 1999$	$501, 502, 503, \ldots, 1000$
$501, 502, 503, \ldots, 1000$	$501, 503, 505, \ldots, 999$	$251, 252, 253, \ldots, 500$
$251, 252, 253, \ldots, 500$	$251, 253, 255, \ldots, 499$	$126, 127, 128, \ldots, 250$
$126, 127, 128, \ldots, 250$	$127, 129, 131, \ldots, 249$	$63, 64, 65, \ldots, 125$
$63, 64, 65, \ldots, 125$	$63, 65, 67, \ldots, 125$	$32, 33, 34, \ldots, 62$
$32, 33, 34, \ldots, 62$	$33, 35, 37, \ldots, 61$	$16, 17, 18, \ldots, 31$
$16, 17, 18, \ldots, 31$	$17, 19, 21, \ldots, 31$	$8, 9, 10, \ldots, 15$
$8, 9, 10, \ldots, 15$	$9, 11, 13, 15$	$4, 5, 6, 7$
$4, 5, 6, 7$	$5, 7$	$2, 3$
$2, 3$	3	1
1	1	

Látható, hogy végül 1-től 1999-ig megkapjuk az összes páratlan számot, mindegyiket pontosan egyszer. Ezek összege az előző megoldásban írtak szerint egymillió.

2. Hányféle módon lehet egy szabályos 100-szög csúcsai közül kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott három csúcs között ne legyen se két szomszédos, se két átellenes?

Első megoldás

Nevezzük átmérőnek a 100-szög leghosszabb átlóit. A feltételek miatt a kiválasztott pontok csak különböző átmérők végpontjai lehetnek. Ezért két lépésben végezzük a kiválasztást: először három átmérőt választunk, utána pedig minden átmérő valamelyik végpontját. Összesen $\binom{50}{3}$-féle módon választható ki 3 átmérő az 50 közül, de ezt még három esetre kell bontani aszerint, hogy hány „szomszédos" van az átmérők között. (***2** pont*)

- Három szomszédos átmérő 50-féle módon választható (az irányított körüljárás szerinti elsővel definiálva a hármast). Bármelyikük egyik végpontját kiválasztva a másik kettőnél már egyértelmű, kit kell választani. Ez $50 \cdot 2$ lehetőség. (***1** pont*)

- Két szomszédos és egy nem szomszédos átmérő $50 \cdot 46$-féle módon választható. A szomszédosakat az előzőkhöz hasonlóan 50-féle módon választhatjuk, a nem szomszédosnál pedig a két szomszédos és a két mellettük levő van kizárva. Ezután a végpontok kétféleképpen választhatók a szomszédosaknál, és kétféle módon a harmadik átmérőnél. Ez $50 \cdot 46 \cdot 2 \cdot 2$ eset. (***1** pont*)

- Végül három nem szomszédos átmérő $\binom{50}{3} - 50 - 50 \cdot 46$-féle módon választható ki, és ezután a végpontok választására 8 lehetőségünk lesz. Ez $\left(\binom{50}{3} - 50 - 50 \cdot 46\right) \cdot 8$ eset. (***1** pont*)

Az összes megoldások száma így

$$50 \cdot 2 + 50 \cdot 46 \cdot 2 \cdot 2 + \left(\binom{50}{3} - 50 - 50 \cdot 46\right) \cdot 8 = 100 \cdot (1 + 46 \cdot 2 + 49 \cdot 32 - 4 - 46 \cdot 4) =$$

$$= 100 \cdot (1 + 92 + 1568 - 4 - 184) = 100 \cdot 1473 = 147300.$$

(***2** pont*)

Összesen: 7 pont

Második megoldás

Vonjuk ki az összes eset számából a rossz háromszögek számát. A rossz esetek számának megállapításánál az igényel odafigyelést, hogy semelyik háromszöget ne számoljuk meg egynél többször.

Rossz eset az, amikor a háromszögnek van két átellenes csúcsa, de nincs szomszédos. A két átellenes csúcsot 50-féle módon lehet választani, a harmadikat pedig 94-féle módon, ez tehát $50 \cdot 94$ eset. (***2** pont*)

A többi rossz háromszögben van szomszédos pont, és ezekből még egyiket se számoltuk meg. Ha két szomszédos pontpár van, abból 100 darab eset van. Végül ha pontosan egy szomszédos pontpár van, akkor a szomszédos pontpárt 100-féle módon tudjuk kiválasztani, a harmadik pont pedig 96-féle módon választható, mert nem lehet a két kiválasztott pont, és a szomszédos pontpár két szomszédja, vagyis ez $100 \cdot 96$ darab háromszög. (***3** pont*)

A végeredmény tehát

$$\binom{100}{3} - (50 \cdot 94 + 100 + 100 \cdot 96) = \binom{100}{3} - 14400 =$$

$$50 \cdot 33 \cdot 98 - 14400 = 100 \cdot (33 \cdot 49 - 144) = 100 \cdot (1617 - 144) = 100 \cdot 1473 = 147300.$$

(***2** pont*)

3. Határozd meg azokat az $\overline{abcd}$ négyjegyű számokat, amelyek egyenlők az $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ kétjegyű számok szorzatának kétszeresével.

Első megoldás

Legyen $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$, $(10 \leq x, y \leq 99)$. A feltétel szerint $100x + y = 2xy$, azaz $y = 2xy - 100x = (2y - 100)x$, tehát y az x többszöröse. (***3** pont*)

Ha $y = kx$, akkor a $100x + kx = 2kx^2$ egyenletet kapjuk, ahonnan $100 + k = 2kx$ (hiszen $x \neq 0$). Mivel $1 \leq k \leq 9$, továbbá az is látható, hogy k-nak párosnak kell lennie, ezért gyors próbálgatással $k = 4, x = 13$ adódik. (***2** pont*)

Tehát a feladat egyetlen megoldása: 1352. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

Második megoldás

Legyen $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$, $(10 \leq x, y \leq 99)$. A feltétel szerint (használva, hogy $2x - 1 \neq 0$)

$$100x + y = 2xy \iff y = \frac{100x}{2x-1} = \frac{50(2x-1)+50}{2x-1} = 50 + \frac{50}{2x-1}$$

Ez csak úgy lehet egész, ha $2x - 1$ az ötven osztója. (***3** pont*)

Az x-r és y-ra vonatkozó feltételeket is figyelembe véve egyedül a $2x - 1 = 25$ választást eredményez kétjegyű pozitív egészeket az ismeretlenekre. (***2** pont*)

Ekkor $x = 13$ és $y = 52$, tehát az egyetlen megfelelő négyjegyű szám az 1352. (***2** pont*)

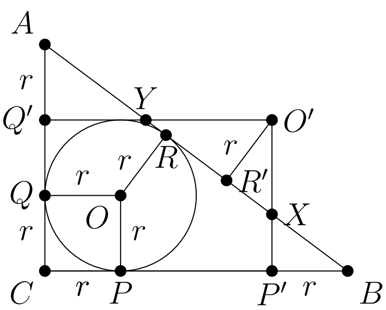
Összesen: 7 pont

Megjegyzés

A helyes megoldás megtalálása próbálgatással 2 pontot ér.

4. Egy derékszögű háromszög beírt köre az átfogót egy d és egy e hosszúságú szakaszra osztja. Bizonyítsd be, hogy a $d \cdot e$ szorzat egyenlő a háromszög területével.

Első megoldás Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöge legyen derékszög, a beírt körének középpontja legyen O, a BC, CA, AB oldalon a beírt kör érintési pontjai legyenek P, Q és R. Tükrözzük P-t és Q-t a BC, illetve a CA oldal felezőpontjára, így kapjuk P'-t és Q'-t. Tükrözzük O-t és R-t az AB oldal felezőpontjára, így kapjuk O'-t és R'-t.



(Az ábra csalóka, az $O'Q'$ nem feltétlenül érinti a beírt kört.)

Mivel P' és az O' pont ugyanakkora $(a - r)$ távolságra van a CA egyenestől, illetve a Q' és O' pont ugyanakkora $(b-r)$ távolságra van a CB egyenestől, ezért $CP'O'Q'$ téglalap. Megmutatjuk, hogy a téglalap területe egyenlő az ABC háromszög területével.

Messe a téglalap $O'P'$ oldala AB-t az X pontban, $O'Q'$ oldala pedig messe AB-t Y-ban. Vegyük észre, hogy az XBP' háromszög egybevágó az $XR'O'$ háromszöggel: szögeik megegyeznek (derékszögűek és van egy csúcsszögpárjuk), és mindkettőnek az egyik (megfelelő) befogója r hosszú. Ugyanígy belátható, hogy YAQ' háromszög egybevágó az $YR'O'$ háromszöggel. Az eddigiek alapján világos, hogy az ABC háromszög és a $CP'O'Q'$ téglalap egyforma területű. (***5** pont*)

Elég megmutatni a téglalap két oldaláról, hogy hosszuk AR illetve BR. Ez pedig nem nehéz, hiszen (felhasználva azt, hogy egy adott pontból egy körhöz egyforma hosszú érintő szakaszok húzhatók, $CP' = BP = BR$ és $CQ' = AQ = AR$. Ezzel az állítást bizonyítottuk. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

Második megoldás

Legyen a beírt kör sugara r, ekkor a befogók hossza $r+d$ és $r+e$. A beírt kör érintési pontokba húzott sugarai két derékszögű deltoidra és egy négyzetre bontják a háromszöget. Ezek területének összege és befogók szorzatának fele is egyenlő a háromszög területével:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{(r+d)(r+e)}{2} \\
2T &= \underbrace{r^2 + rd + re}_{T} + de \\
T &= de
\end{aligned}
$$

Összesen: 7 pont

Harmadik megoldás

Az érintőszakaszok formuláinak ismeretében, használva Pitagorasz tételét:

$$
de = (s-a)(s-b) = \frac{(c+b-a)(c-b+a)}{4} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2} = T
$$

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.