TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Van egy piros és egy zöld korongunk. Mindkét korong mindkét oldalán van egy-egy pozitív egész szám, a piros korong egyik oldalán a 2000, a zöld korong egyik oldalán a 18 található. A korongokat az összes lehetséges módon az asztallapra helyezve a korongon látható számok összegére pontosan négyféle különböző eredményt kaphatunk, és ezek ráadásul egymást követő pozitív egész számok. Milyen számok állhatnak a korongok túlsó oldalán? Az összes lehetséges megoldást keresd meg!

Megoldás

A piros korong két oldalán álljon $p_1 < p_2$, a zöld korong két oldalán álljon $z_1 < z_2$. Ekkor a legkisebb összes $p_1 + z_1$, a legnagyobb $p_2 + z_2$, és a két középsőre két lehetőség van. (***1** pont*)

Nézzük még a két lehetőséget külön-külön:

1. eset: $p_1+z_1 < p_1+z_2 < p_2+z_1 < p_2+z_2$. Ekkor világos, hogy $z_2 = z_1+1$ és $p_2 = p_1+2$, és ezzel a két feltétellel tényleg négy egymást követő szám lesz az összeg. Innen a megoldások (p_1, p_2, z_1, z_2) sorrendben: $(1998, 2000, 17, 18)$, $(1998, 2000, 18, 19)$, $(2000, 2002, 17, 18)$ és $(2000, 2002, 18, 19)$. (***3** pont*)

2. eset: $p_1 + z_1 < p_2 + z_1 < p_1 + z_2 < p_2 + z_2$. Ekkor világos, hogy $p_2 = p_1 + 2$ és $z_2 = z_1 + 2$, és ezzel a két feltétellel tényleg négy egymást követő szám lesz az összeg. Innen a megoldások: $(1999, 2000, 16, 18)$, $(1999, 2000, 18, 20)$, $(2000, 2001, 16, 18)$ és $(2000, 2001, 18, 20)$. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

Ha valaki legalább négy megoldást talál, kapjon 1 pontot, ha mind a nyolcat megtalálja, kapjon 2-t.

2. Az $ABCD$ négyzet átlóinak metszéspontja O, az AB oldal A-hoz legközelebb eső negyedelőpontja N, az AD oldal egy belső pontja P. Az OP egyenes a DN szakaszt az X, a BC oldalt az Y pontban metszi. Lehetséges-e, hogy a $XYCD$ négyszög területe éppen háromszorosa az $ANXP$ négyszög területének?

Megoldás

Legyen a négyzet területe 1 és vezessük be az alábbi jelöléseket: $T_{ANXP} = a$, $T_{PXD} = d$ és $T_{XYCD} = c$. Könnyen látható, hogy $a + d = \frac{1}{8}$ és mivel a négyzet középpontján átmenő egyenesek felezik a négyzet területét, ezért $c + d = \frac{1}{2}$. Ha igaz lenne, hogy $c = 3a$, akkor $c + d = 3a + d = \frac{1}{2}$ és $a + d = \frac{1}{8}$ különbségéből $2a = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, vagyis $a = \frac{3}{16}$. De ekkor $d = \frac{1}{8} - a = \frac{2}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{1}{16}$ lenne, ami lehetetlen.

Tehát a kérdésre a válasz: nem lehetséges. **Összesen: 7 pont**

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, melyekre $\dfrac{n}{555 - n}$ négyzetszám?

Megoldás

$$\frac{n}{555-n} = \frac{-(555-n)+555}{555-n} = -1 + \frac{555}{555-n}$$

Egy négyzetszám nem negatív, ezért elég 555 pozitív osztóit vizsgálni. Olyan osztót keresünk tehát, amely 1-gyel nagyobb egy négyzetszámnál, és ezek osztópárja lesz $555 - n$. (***3** pont*)

$555 = 1 \cdot 555 = 3 \cdot 185 = 5 \cdot 111 = 15 \cdot 37$, tehát a szóba jövő osztók: $1, 5, 37$, vagyis $555 - n$ értéke 555, 111 vagy 15. (***2** pont*)

Az első esetben n nem pozitív egész. A másik két esetben $n = 444$ (és a négyzetszám a 4), illetve $n = 540$ (és a négyzetszám a 36). (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

Egy megoldás 1 pontot, mindkét megoldás 2 pontot ér.

4. Anna és Roland a következő játékot játsszák. Roland beírja egy $n \times n$-es táblázat mezőibe a számokat 1-től n^2-ig valamilyen elrendezésben. Annának a táblázat bal felső sarkából indulva el kell jutnia a táblázat jobb alsó sarkáig úgy, hogy mindig élszomszédos mezőre lép, és olyan mezőre nem léphet, ahol korábban már járt. Célja, hogy az út során érintett mezőkben szereplő számok összege a lehető legnagyobb legyen. Roland úgy próbálja kezdetben kitölteni a táblázatot, hogy az Anna által elérhető összeg a lehető legkisebb legyen. Határozzuk meg minden $n > 1$ esetén az Anna által elérhető legnagyobb összeget (feltételezzük, hogy Anna és Roland is optimálisan játszik).

Megoldás

Ha n páratlan, akkor az összes szám begyűjthető, például oszloponként le,fel,le,fel,...,fel,le bejárással. Így az elrendezéstől függetlenül Anna mindig el tudja érni az $1+2+3+\ldots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ összeget, tehát a legnagyobb érték is ennyi. (***1** pont*)

Ha n páros, akkor színezzük ki a négyzet mezőit sakktáblaszerűen, legyen mondjuk a bal felső mező sötét. A lépési szabály szerint a meglátogatott mezők színe sötét - világos - sötét - ... - sötét, ezért az út során eggyel több sötét mezőt érintettünk. Mivel a táblán egyenlő a sötét és világos mezők száma, legalább egy világos mező kimaradt. (***1** pont*)

Később megmutatjuk, hogy elérhető: egyetlen világos mező maradjon csak ki, és az bármelyik lehet.

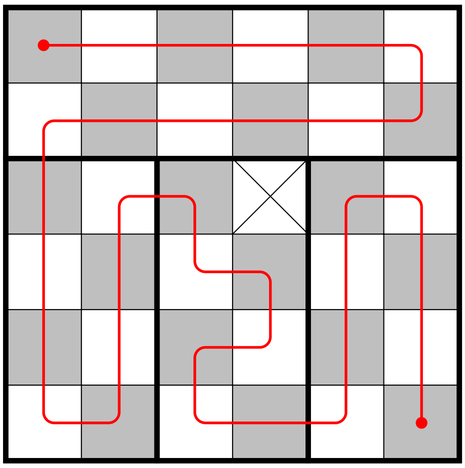
Ebből következik, hogy akkor lesz a legkisebb egy adott elrendezéshez tartozó összeg, amikor a világos mezőkön vannak a nagyobb számok, vagyis $n^2/2+1, n^2/2+2, \ldots, n^2$. A fenti állítás alapján a kihagyott világos mezőt választhatjuk úgy, hogy a lehető legkisebb legyen a kimaradó szám, vagyis $n^2/2+1$. Tehát páros n esetén a legnagyobbak közötti legkisebb érték $1+2+3+\ldots+n^2-(n^2/2+1)=\frac{n^2(n^2+1)}{2}-\left(\frac{n^2}{2}+1\right)=\frac{n^4-2}{2}$. (***2** pont*)

Most bebizonyítjuk, hogy bármelyik világos mezőhöz van olyan út, ami azt az egy mezőt hagyja ki.

A világos mezők „koordinátáinak” paritása különböző. Feltehetjük, hogy a kiválasztott világos mező páros oszlopban és páratlan sorban van (különben tükrözhetünk a bal felső - jobb alsó átlóra). Ekkor a kiválasztott mező felett páros sok teljes sor van, tőle balra pedig páratlan sok teljes oszlop. A bejárás történhet így:

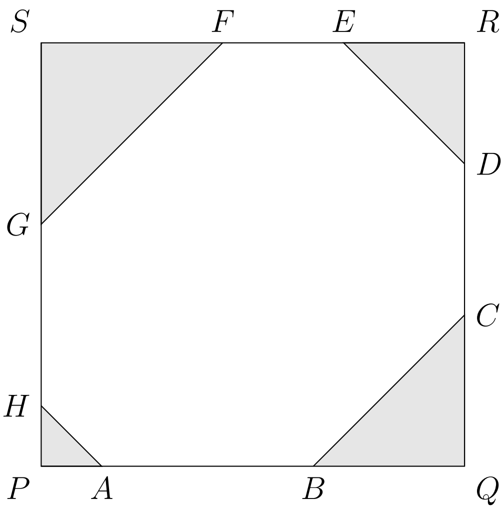
- Először bejárjuk jobb -bal -jobb - bal ... sorrendben a kiválasztott mező feletti teljes sorokat.
- Ezután bejárjuk le - fel -le -fel - ... sorrendben a kiválasztott mező előtti teljes oszlopokat, kivéve a legjobbra levőt.
- Ezután cikk-cakkban bejárjuk a kiválasztott mező oszlopát és a tőle balra lévőt úgy, hogy végül a kiválasztott mező oszlopának legaljára érkezünk.
- Végül a megmaradt bal alsó téglalapot bejárhatjuk alulról indulva fel - le - fel - le - ... sorrendben, mert mindkét mérete páros.

A bejárási algoritmust az alábbi ábra szemlélteti $n=6$ esetén, amikor a kiválasztott világos mező a harmadik sor negyedik oszlopában van. (***3** pont*)

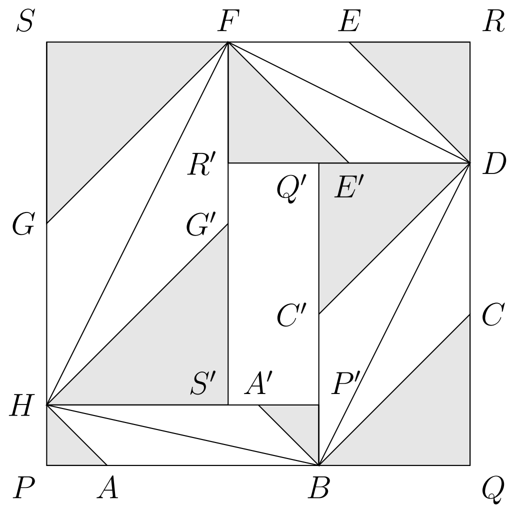


Összesen: 7 pont

5. A $PQRS$ négyzetből a sarkainál levágtuk a PAH, QCB, RED, SGF egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az $ACEG$ és a $BDFH$ négyszög területe egyenlő.



Első megoldás



Legyen a négyzet oldalának hossza a.

Az ábrát úgy kapjuk, hogy tükrözzük a P és az A pontot a HB felezőpontjára, a Q és a C pontot a BD felezőpontjára, az R és az E pontot a DF felezőpontjára, az S és a G pontot az FH felezőpontjára. A tükrözésekből adódó egybevágóságokat felhasználva az jön ki, hogy a $BDFH$ négyszög területe megkapható úgy, hogy az $ABCDEFGH$ nyolcszög területéhez hozzáadjuk a BQC, DRE, FCG, HPA háromszögek és a $P'Q'R'S'$ téglalap területét, és a kapott területet elfelezzük. (***4** pont*)

Így már csak azt kell megmutatni, hogy ha a P, Q, R, S pontokat a GA, AC, CE, EG szakaszok felezőpontjára tükrözzük, akkor a kapott $P''Q''R''S''$ téglalap területe megegyezik a $P'Q'R'S'$ téglalap területével. Ez viszont nem nehéz, mert az utóbbi területe könnyen látható módon $|a - BQ - FS| \cdot |a - DR - HP|$, az előbbié pedig $|a - PA - RE| \cdot |a - QC - SG|$. Ezek pedig egyenlők, mert a négyzet sarkaiban lévő egyenlő szárú derékszögű háromszögek miatt $BQ = QC$, $FS = SG$, $DR = RE$ és $HP = PA$. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

Második megoldás

Tekintsük a négyzet oldalát egységnyinek és vezessük be a következő jelöléseket: $HP = PA = x$, $BQ = QC = y$, $DR = RE = z$ és $FS = SG = w$. A két kérdéses négyszög területe kifejezhető úgy, hogy az eredeti egység négyzetből derékszögű háromszögeket vágunk le.

$$
\begin{aligned}
T_{ACEG} &= T_{PQRS} - T_{ACQ} - T_{CRE} - T_{ESG} - T_{GPA} \\
&= 1 - \frac{(1-x)y + (1-y)z + (1-z)w + (1-w)x}{2} \\
&= 1 - \frac{x + y + z + w - xy - yz - zw - wx}{2}
\end{aligned}
$$

Hasonlóan:

$$
\begin{aligned}
T_{BDFH} &= T_{PQRS} - T_{BQD} - T_{DRF} - T_{FSH} - T_{HPB} \\
&= 1 - \frac{y(1-z) + z(1-w) + w(1-x) + x(1-y)}{2} \\
&= 1 - \frac{x + y + z + w - xy - yz - zw - wx}{2}
\end{aligned}
$$

Ugyanazt a formulát kaptuk a két területre, tehát megegyeznek. (**7** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.