TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2019. május 25.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy tíztagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy kerekasztal köré ültetik le, a székek 1-től 10-ig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége (a különbség képzésekor a kisebb számot vonjuk ki a nagyobból). A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Mit tegyen a lehető legnagyobb számla elérése érdekében?

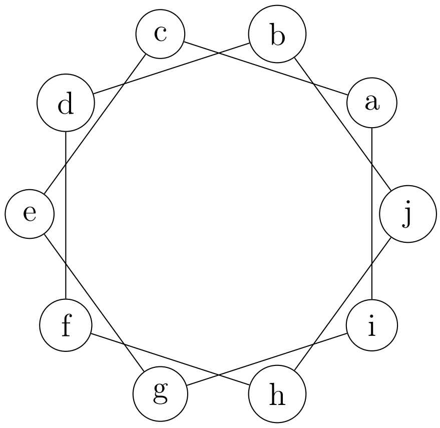
1. megoldás

Jelöljük valamilyen körüljárás szerint a székek sorszámát betűkkel: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$. a és b különbsége $a-b$-vel vagy $b-a$-val egyenlő, ez elmondható a többi különbségről is. Ha összeadjuk a 10 különbséget, és elvégezzük az összevonásokat, $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ mindegyike -2-szer, 0-szor vagy 2-szer fog szerepelni az összegben. (***1** pont*)
Azt is vegyük észre, hogy az együtthatók összege 0. Valóban, ha $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ mindegyikének értéke 1 lenne, a kapott kifejezés akkor is helyesen adja meg a különbségek összegét (hiszen $a-b$ és $b-a$ is 0), ami 0, másrészt viszont pont az együtthatók összegét kapjuk meg. Ez azt jelenti, hogy ugyanannyi 2, mint -2 lesz az együtthatók között. (***2** pont*)
Ha van 0 az együtthatók között, akkor persze van még egy másik 0 is (a 0-k száma páros), akkor ha a nagyobb sorszám együtthatóját 2-re, a kisebbét -2-re változtatom, akkor növeltem az összeget a két sorszám különbségének kétszeresével. (***1** pont*)
Végül ha a 6, 7, 8, 9, 10 sorszámok együtthatója között van -2, akkor az 1, 2, 3, 4, 5 sorszámok együtthatója között van 2 (hiszen öt 2 és öt -2 együttható szerepel. Ha most ezt a két együtthatót kicserélem, akkor növeltem az összeget a két sorszám különbségének négyszeresével. (***2** pont*)
Mivel csak véges sok kombináció lehetséges, így tényleg van olyan eset, amikor az összeg a lehető legnagyobb, és az előzőek alapján ez nem lehet más, mint a $2(10+9+8+7+6)-2(5+4+3+2+1) = 50$ eset. (***1** pont*)
Ez a sorrend csak akkor lenne megvalósítható, ha nem lenne másodszomszédos a 6, 7, 8, 9, 10 számok között, ami nem lehetséges: ha megnézzük a körben a páros helyeket, legfeljebb kettő lehetne legalább 6, és ugyanez elmondható a körben a páratlan helyekről is. (***1** pont*)
A második legnagyobb szóba jövő szám a 48 (hiszen az összeg páros, mert mindegyik együttható páros), és ez el is érhető, például így: 10, 8, 1, 3, 9, 7, 2, 4, 5, 6. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Jelöljük valamilyen körüljárás szerint a székek sorszámát betűkkel: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, és kössük össze azokat, amelyek különbsége szerepel a végösszegben. Számoljunk az egyszerűség kedvéért a különbségek összegével, elég az eredményt a legvégén megszorozni 1000-rel.



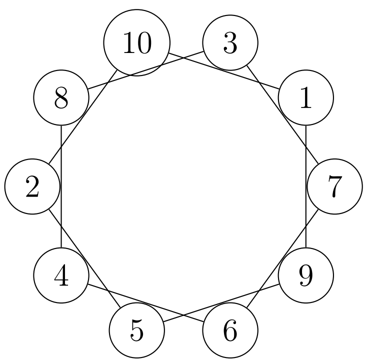
Látható, hogy az $\{a, i, g, e, c\}$, illetve a $\{b, j, h, f, d\}$ „körökben” egymástól függetlenül variálható a székek sorrendje. Tehát a pincér feladata ügyesen két ötös csoportra osztani a tíz széket, majd a két ötös körben megtalálni a legjobb elrendezést. (***1** pont*)

Mivel minden sorszám két különbségben szerepel, ezért a következők teljesülnek:

- A végösszeg felfogható egy húsztagú összegként,
- amelyben tíz tag pozitív, tíz tag pedig negatív előjelű
- és a tagok abszolútértékei az $1, 1, 2, 2, \ldots, 10, 10$ számok.

(***1** pont*)

Az alábbi elrendezésben 48 az összeg.



$$\begin{aligned}&(10-1)+(9-1)+(9-5)+(5-2)+(10-2)+\\&+(7-3)+(7-6)+(6-4)+(8-4)+(8-3)=\\&=(9+8+4+3+8)+(4+1+2+4+5)=32+16=48\end{aligned}$$

(***2** pont*)

Megmutatjuk, hogy ez az elérhető legnagyobb végösszeg. Rendezzük át a tagokat előjel szerint csoportosítva, és ezen belül abszolútértékük szerint csökkenően rendezve:

$$48=10+10+9+9+8+8+7+7+6+(5-6)-5-4-4-3-3-2-2-1-1$$

Mivel pontosan a tagok fele lesz negatív előjelű, egyetlen nagyobb végösszeg lenne elképzelhető, ahol a középen lévő zárójelben $5-6$ helyett $-5+6$ szerepel. Ekkor ugyanis a húsz szám közül pont a tíz legnagyobb abszolútértékű kapna pozitív előjelet. (***1** pont*)
De ez nem lehetséges, mert egy ötös „körben” öt pozitív és öt negatív előjelű tag keletkezik, és a $10, 9, 8, 7, 6$ számok közül valamelyik három egy ötösbe kerül, ott pedig nem tud mind a három kétszer pozitív előjellel szerepelni. (***1** pont*)
Tehát a fenti ábrán látható elrendezés vezet a legnagyobb számlához, ami 48000 forint. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

2. Nevezzük egy háromszög valamely oldalát *kurtá*nak, ha rövidebb a hozzább tartozó magasságnál. Legfeljebb hány *kurta* oldala lehet egy háromszögnek?

Megoldás

Egy kurta oldal nyilván lehetséges (egy háromszögben tetszőlegesen meg lehet választani egy oldalt és a hozzá tartozó magasságot). Megmutatjuk, hogy egynél több kurta oldal nem lehetséges. (***1** pont*)

Jelölje a háromszög oldalait a, b és c, a hozzájuk tartozó magasságokat m_a, m_b és m_c. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $a \leq b \leq c$.

Vegyük észre, hogy egyik magasság sem lehet hosszabb, mint az a két oldal, amely nem tartozik hozzá (tehát pl. $m_a \leq b$ és $m_a \leq c$), hiszen egy pont és egy egyenes között a legrövidebb távolságot a merőleges szakasz határozza meg. (***3** pont*)

Ezek alapján $m_c \leq b \leq c$, azaz c nem lehet kurta, és $m_b \leq a \leq b$, így b sem lehet kurta. Ezzel az állításunkat beláttuk. (***3** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Egy sorozat bármely négy (ebben a sorrendben) egymást követő a, b, c és d tagjára teljesül, hogy $a \cdot d = b \cdot c$. A sorozat első tagja 112, negyedik tagja 192, hetedik tagja 378. Mennyi lehet a sorozat 12. tagja? (A sorozatnak lehetnek nem egész tagjai is!)

1. megoldás

A sorozatban nem szerepelhet a 0. Ugyanis az első és a negyedik tagja nem nulla, így a második és a harmadik sem az (a szorzatuk nem nulla). Ha viszont két egymást mellett lévő tag nem nulla, akkor az előttük és a mögöttük lévő tag sem nulla (mert a szorzatuk nem nulla), így tehát a sorozat egyik tagja sem nulla. (***1** pont*)
Ezután keresztbe osztva azt kapjuk, hogy $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Ebből azonnal következik, hogy bármely két, egymást kettővel követő tagnak ugyanakkora az aránya. Jelölje ezt az arányt q. (***3** pont*)
Mivel ismerjük az első és a hetedik tagot, az eddigiek alapján azt kapjuk, hogy $\frac{378}{112} = q^3$. Innen kis számolással $q = \frac{3}{2}$. mivel a 12. tag a 4. tag q^4-szerese, így a feladat kérdésére a válasz: 972. (***3** pont*)

2. megoldás

A sorozat második tagja nem lehet nulla, mert a második és a harmadik tag szorzata nem nulla. (***1** pont*)
Dolgozzunk a számok prímtényezős felbontásával, és fejezzük ki a hiányzó tagokat a második taggal, $a_2 = x$-szel.

$$a_1 = 2^4 \cdot 7, a_2 = x, a_3 = \frac{1}{x} \cdot 2^{10} \cdot 3 \cdot 7, a_4 = 2^6 \cdot 3, a_5 = \frac{1}{x^2} \cdot 2^{16} \cdot 3^2 \cdot 7, a_6 = \frac{1}{x} \cdot 2^{12} \cdot 3^2, a_7 = \frac{1}{x^3} \cdot 2^{22} \cdot 3^3 \cdot 7$$

(***3** pont*)

Az előző felsorolás utolsó tagjának ismerjük értékét: $a_7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = \frac{1}{x^3} \cdot 2^{22} \cdot 3^3 \cdot 7$. (***1** pont*)
Innen $x^3 = 2^{21}$, vagyis $x = 2^7$ adódik. (***1** pont*)
Most már egyértelműen felírható az összes tag, és a_{12}-re $2^2 \cdot 3^5 = 972$ jön ki. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A befejezés számolása egyszerűsíthető azzal, ha a 2, 3 és 7 kitevőjét írjuk csak fel.

$$(4,0,1) \to (7,0,0) \to (3,1,1) \to (6,1,0) \to (2,2,1) \to (5,2,0) \to$$
$$\to (1,3,1) \to (4,3,0) \to (0,4,1) \to (3,4,0) \to (-1,5,1) \to (2,5,0)$$

Az utolsó előtti hármasban a -1 kitevőhöz az $\frac{1}{2}$ hatvány érték tartozik, így a_{11} nem egész.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. A 8.c osztályba 29 gyerek jár. Azt tudjuk, hogy mindegyik gyerek 14 vagy 15 éves. Az osztályfőnök meg akarja tudni, hogy hány éves az egyik gyerek, de a gyerekek csak úgy hajlandók válaszolni, ha a tanár rámutat 11 gyerekre és akkor elárulják a 11 gyerek életkorának összegét. Mennyi a legkevesebb kérdés, amiből a tanár biztosan ki tudja találni, hogy hány éves a kérdéses személy?

Megoldás

Tegyük fel, hogy Sári életkorát keressük, amit jelöljünk s-sel. A többi diák életkora legyen $a_1, a_2, \ldots, a_{28}$.

Egy kérdés nem lehet elég. Ugyanis ha Sári nem szerepel a kiválasztott 11 diák között, akkor nem tudunk semmit róla, ha pedig igen, akkor legyen mondjuk Júlia is benne az összegben, és akkor nem tudjuk megkülönböztetni a Sári 14, Júlia 15 éves esetet a Sári 15, Júlia 14 éves esettől. (***1** pont*)

Két kérdés sem elég. Ha Sári egyikben sem szerepel, akkor semmit nem tudunk róla. Ha Sári mindkettő kérdésben szerepel, akkor mindkét kérdésben lesz egy párja, aki a másik kérdésben nincs benne (különben a két kérdés azonos lenne, ami az előző eset). Ha eredetileg Sári 14, és a két párja 15, illetve Sári 15 és a két párja 14, akkor ugyanazt a választ kapja a tanár, tehát nem lehet a két eset között különbséget tenni. Ha Sári csak az egyik kérdésben szerepel, akkor két eset lehetséges: ha van olyan diák Sárin kívül, aki csak ebben a kérdésben szerepel, akkor nem lehet megkülönböztetni azt a két esetet, ha Sári 14 és ez a diák 15, vagy Sári 15 és ez a diák 14 éves. Ha nem ez a helyzet, akkor a maradék tíz diák mind a két kérdésben szerepel (legyen köztük egy Lili), és van még egy diák, Róza, aki csak a másik kérdésben szerepel. Ekkor a Sára, 14 Róza, 14 és Lili 15, illetve a Sára 15, Róza 14 és Lili 14 éves eseteket nem lehet megkülönböztetni egymástól. (***2** pont*)

Három kérdés viszont már elegendő:

$$\begin{aligned}
K_1 &: s + (a_1 + \ldots + a_5) + (a_6 + \ldots + a_{10}) \\
K_2 &: s + (a_1 + \ldots + a_5) + (a_{11} + \ldots + a_{15}) \\
K_3 &: s + (a_6 + \ldots + a_{10}) + (a_{11} + \ldots + a_{15})
\end{aligned}$$

Ha a három kérdésre kapott választ összeadjuk, ismerni fogjuk $3s + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{15})$ értékét. Ennek az összegnek a paritása egyenlő s paritásával. Ha tehát az összeg páros, akkor Sári 14, egyébként pedig 15 éves. (***4** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.