TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2019. május 24.

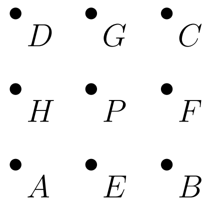
NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. A sík minden pontjához hozzárendeltünk egy egész számot úgy, hogy a következő teljesül: ha A, B, C és D egy négyzet csúcsai, akkor a hozzájuk rendelt számok összege nulla. Lehetséges-e, hogy a sík valamely P pontjához nem a nullát rendeltük?

Megoldás

A sík tetszőleges P pontját tekintsük egy $ABCD$ négyzet középpontjaként (tetszőlegesen választhatjuk a négyzetet). Az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai legyenek E, F, G és H.



(***1** pont*)

A folytatásban egy ponthoz rendelt számot ugyanazzal a betűvel fogunk jelölni, mint a pontot. Az $AEPH$, $EBFP$, $PFCG$ és $PGDH$ négyzetekre alkalmazva a feltételt:

$$0 = (A + E + P + H) + (E + B + F + P) + (P + F + C + G) + (P + D + G + H)$$

$$0 = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H + 4P$$

(***2** pont*)

Mivel $ABCD$ és $EFGH$ is négyzetek, ezért

$$(A + B + C + D) + 2 \cdot (E + F + G + H) = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H = 0.$$

(***2** pont*)

Emiatt viszont $4P = 0$, azaz $P = 0$. Tehát a hozzárendelés csak olyan lehet, amely bármely P ponthoz a nullát rendeli. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Legyen
$$S = 2019^{2019} + 2019^{2018} + 2019^{2017} + \ldots + 2019^2 + 2019^1 + 1.$$
Mutasd meg, hogy S-nek van háromjegyű prímosztója.

1. megoldás

Mivel $2019^{n+1} + 2019^n = 2020 \cdot 2019^n$, ezért az S összegben bármely két egymást követő tag összege osztható 2020-szal. (***4** pont*)
Mivel S páros számú tagból áll, így S is osztható 2020-szal. (***1** pont*)
Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S-nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen). (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

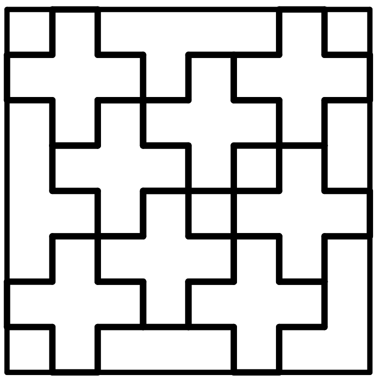
Vizsgáljuk meg S osztási maradékát 2020-szal. Mivel 2019 és -1 ugyanolyan maradékot ad 2020-szal, ezért S maradéka megegyezik az
$$S' = (-1)^{2019} + (-1)^{2018} + (-1)^{2017} + \ldots + (-1)^2 + (-1)^1 + 1$$
összeg maradékával. (***3** pont*)
Ez az összeg viszont $-1+1-1+1-1+\ldots-1+1 = 0$, tehát S', és így S is osztható 2020-szal. (***2** pont*)
Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S-nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen). (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

3. Legfeljebb hány kereszt alakú tartomány (egy négyzetből és négy vele oldalszomszédos négyzetből álló alakzat) helyezhető el egy 8×8-as sakktáblán átfedés nélkül? (A kereszt alakú tartományok nem lóghatnak le a tábláról, és követniük kell a rácsvonalakat.)

Megoldás

Nyolc kereszt kis próbálkozással elhelyezhető, például:

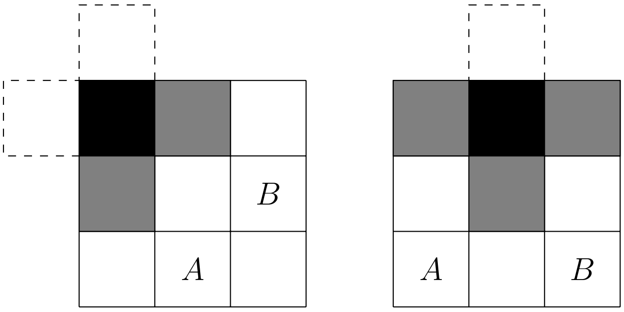


(***3** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

A keresztek közepe a belső hatszor hatos négyzetbe esik. Ha lehetne kilenc kereszt is a táblán, akkor a belső hatszor hatos valamelyik háromszor hármas negyedébe legalább három középpont esne. (***1** pont*)

Ez viszont egyszerűen ellenőrizhető, hogy nem lehetséges, nem fér el. Ha egy középpont a háromszor hármas közepébe esik, akkor abban a negyedben már nem lehet másik kereszt középpontja, ha pedig egy sarokba vagy egy él középpontra, akkor csak az ábrákon A-val és B-vel jelölt mezők jöhetnek szóba másik kereszt középpontjaként, de mindig csak az egyik.



(***3** pont*)
Összesen: 7 pont

4. Robot Robi a következő számolást végzi: ha megadunk neki egy pozitív egész számot, ő elosztja maradékosan 43-mal, majd összeadja a kapott maradékot és hányadost, és leírja az így kapott számot. Egy napon Robinak sorra az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat adták meg, és ő mindegyikkel elvégezte a fenti számolást. A Robi által leírt 2019 darab szám között hány darab 7-tel osztható van?

1. megoldás

Legyen az N szám esetén a kapott hányados h, a maradék m. Ekkor

$$N = 43 \cdot h + m = 42 \cdot h + (h + m).$$

(***3** pont*)
Mivel $42 \cdot h$ biztosan 7-tel osztható, ezért $(h + m)$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha N is osztható 7-tel. (***2** pont*)
Tehát Robot Robi éppen annyi 7-tel osztható számot írt le, ahány az 1, 2, 3, ..., 2019 számok között volt. Mivel $2019 = 288 \cdot 7 + 3$, ezért 288 darab 7-tel osztható számot írt le Robi. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

Mivel $2019 = 46 \cdot 43 + 41$, ezért a hányadosok 0-tól 46-ig, a maradékok 0-tól 42-ig terjedhetnek. (***1*** *pont*)

Közülük csak két eset nem fordul elő: amikor mindkettő 0, illetve amikor a hányados 46 és a maradék 42. (***1*** *pont*)

Mivel 7-tel osztható összeget akarunk, a hányados 7-tel vett osztási maradéka egyértelműen meghatározza a maradék lehetséges 7-es maradékait. Ez alapján összegyűjthetjük a megfelelő lehetőségeket.

7-es maradék	**Hányadosok**	**Maradékok**	**Lehetőségek**
$0+0$	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	$7 \cdot 7 = 49$
$1+6$	1, 8, 15, 22, 29, 36, 43	6, 13, 20, 27, 34, 41	$7 \cdot 6 = 42$
$2+5$	2, 9, 16, 23, 30, 37, 44	5, 12, 19, 26, 33, 40	$7 \cdot 6 = 42$
$3+4$	3, 10, 17, 24, 29, 38, 45	4, 11, 18, 25, 32, 39	$7 \cdot 6 = 42$
$4+3$	4, 11, 18, 25, 32, 39, 46	3, 10, 17, 24, 29, 38	$7 \cdot 6 = 42$
$5+2$	5, 12, 19, 26, 33, 40	2, 9, 16, 23, 30, 37	$6 \cdot 6 = 36$
$6+1$	6, 13, 20, 27, 34, 41	1, 8, 15, 22, 29, 36	$6 \cdot 6 = 36$

(***4*** *pont*)

A fentiek között szerepel a $(0, 0)$ pár is, ezt ki kell venni. Így a Robi által leírt 7-tel osztható számok száma összesen $49 + 42 + 42 + 42 + 42 + 36 + 36 - 1 = 288$. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

5. Az egyenlőszárú ABC háromszögbe beírtunk egy DEF háromszöget úgy, hogy D az AB oldalon, E az AC oldalon és F a BC oldalon van. Tudjuk, hogy $AD = AE$, $BD = BF$ és $DFCE$ egy deltoid. Bizonyítsd be, hogy a DEF háromszög egyenlőszárú! (Sem a $DFCE$ deltoidnál, sem az ABC háromszögnél nem adtuk meg, hogy melyek az egyenlő oldalak.)

1. megoldás

Két esetre bontjuk a feladat megoldását aszerint, hogy a $DFCE$ deltoid melyik átlója a deltoid tükörtengelye.

(a) A deltoid CD átlója a deltoid szimmetriatengelye. Ekkor $ED = FD$, tehát DEF egyenlőszárú. (***1*** *pont*)

(b) A deltoid EF átlója a deltoid szimmetriatengelye.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

i. Az ABC háromszögben AC az alap. (Ha BC az alap, az pont ugyanígy megy.) Tudjuk, hogy $BD = BF$ és $BA = BC$. Tehát a párhuzamos szelők tétele alapján DF párhuzamos AC-vel. Ebből azt kaptuk, hogy $DFCE$ egy olyan deltoid, aminek az egyik szemközti oldalpárja párhuzamos. Mivel egy deltoid tengelyesen szimmetrikus, így a másik szemközti oldalpár is párhuzamos. Tehát $DFCE$ nem csak egy deltoid hanem egy paralelogramma is. Viszont minden négyszög, ami egy egyszerre deltoid is és paralelogramma is egy rombusz, hiszen bármely két oldala egyenlő hosszúságú.
Ha pedig $DFCE$ rombusz, akkor már a szögek ismerete nélkül is visszakaptuk az előző esetet ($ED = FD$). (***3** pont*)

ii. Végül ha az ABC háromszögben AB az alap, akkor $\alpha = DAE\sphericalangle = FBD\sphericalangle$ jelölésekkel és az $AD = AE$, $BD = BF$ feltételeket használva $DEA\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2} = DFB\sphericalangle$. Ebből $DEC\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2} = DFC\sphericalangle$. De mivel EF szimmetriatengely $DFCE$-ben, ezért innen $DEF\sphericalangle = DFE\sphericalangle$ is következik. Ez pedig azt jelenti, hogy DEF egyenlőszárú. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

1. eset: ha a $DFCE$ deltoid szimmetriatengelye szimmetriatengelye a DC átló, akkor $ED = FD$, tehát DEF egyenlő szárú. (***1** pont*)

2. eset: ha a $DFCE$ deltoid szimmetriatengelye az FE átló, legyen az ADE háromszög ED alapján lévő két egyforma szög x, a BDF háromszög DF alapján lévő két egyforma szög y. Ekkor az ABC háromszögben az A csúcsnál lévő szög nagysága $180° - 2x$, a B csúcsnál lévő szög nagysága $180° - 2y$. A deltoid feltételezett szimmetriája miatt a deltoidban a D és a C csúcsnál egyforma szög van, így az ABC háromszögben a C csúcsnál lévő szög $180° - x - y$. Ebből a három szögből kettő egyforma (mert ABC egyenlő szárú): mindhárom esetben azt kapjuk, hogy $x = y$. (***4** pont*)

Mivel a deltoidban E-nél $180° - x$, F-nél $180° - y$ a szög nagysága, így ez a két szög is egyforma. A deltoidban így bármely két szemközti szög egyforma, azaz paralelogramma is. Viszont azok a négyszögek, melyek deltoidok és paralelogrammák, azok rombuszok is (két-két szemközti és két-két szomszédos oldala is egyforma, vagyis mind a négy oldalal egyforma), azaz megint szimmetriatengely a DC átló, így készen vagyunk. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő