TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2021. május 29.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. 16 nyolcadikos focizik, 8 a 8 ellen. Közülük heten járnak fociedzésre, kilencen nem. Nóri jár fociedzésre, és olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában (vele együtt) többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Megoldás. Nándi úgy tud kialakítani edzésre járó többséget a csapatában, ha maga mellé még hat, öt, négy vagy három olyan tagot választ, akik szintén járnak edzésre. Nándin kívül még hat ember jár edzésre és kilenc nem. Nevezzük az első csoportot E halmaznak, a másodikat N halmaznak. Nándinak összesen hét csapattársat kell választania úgy, hogy E-ből legalább hármat választ.

A jó eseteket az alábbi táblázat sorolja fel:

E-ből választott játékosok száma	N-ből választott játékosok száma
6	1
5	2
4	3
3	4

Általában egy n elemű halmazból k különböző elem $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$-féle módon választható ki. Ha E-ből x-féle módon tudunk választani, N-ből pedig y-féle módon, akkor ez összesen $x\cdot y$ lehetőség, mert az edzésre járók és edzésre nem járók csoportja tetszőlegesen párosítható, amennyiben a csoportok mérete rögzített.

A fentiek alapján Nándi lehetőségeinek száma:

$$\binom{6}{6}\cdot\binom{9}{1}+\binom{6}{5}\cdot\binom{9}{2}+\binom{6}{4}\cdot\binom{9}{3}+\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{4}=1\cdot 9+6\cdot 36+15\cdot 84+20\cdot 126=4005$$

2. Annának van 16 doboza négy színben (sárga, piros, kék, zöld) és méretben (kicsi, közepes, nagy, óriás). Ezeket négyesével egymásba pakolja úgy, hogy minden négyes csoportban minden színből és méretből pontosan egy szerepeljen. Miután minden dobozt becsukott, megérkezünk, és szeretnénk megtudni, hogy a négy óriás doboz közül melyik tartalmazza a kicsi sárga dobozt. Állapítsd meg minél kevesebb doboz kinyitásával, hogy melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz!
Ahhoz, hogy egy dobozt kinyithass, mindegyik nála nagyobb, őt tartalmazó dobozt ki kell nyitnod. A kicsi sárga dobozt tartalmazó dobozt nem muszáj ténylegesen kinyitni. Nem kell indokolni, hogy az általad talált megoldás a lehető legkevesebb kinyitásból áll.

Megoldás. Mutatunk egy olyan módszert, amely három doboz kinyitásával kideríti, melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz.

Először tegyük félre az óriás sárga dobozt, annak belsejében már nem lehet másik (kisebb) sárga doboz. Most nyissuk ki a piros és a kék óriás dobozt. (Ez idáig két nyitás.) Most már látjuk a bennük lévő két nagy doboz színét.

Két eset lehetséges: vagy látunk egy nagy sárga dobozt, vagy nem.

- Ha nem látunk nagy sárga dobozt, akkor biztosak lehetünk, hogy az a másik érintetlen (a zöld) óriás dobozban van, és abban kisebb sárga doboz nem lehet, ezért tegyük azt is félre. A keresett kicsi sárga doboz vagy a kék vagy a piros óriás dobozban van.
- Ha látunk egy nagy sárga dobozt, akkor az őt tartalmazó óriás dobozt is tegyük félre. Most a keresett kicsi sárga doboz vagy az éritetlen zöld óriás dobozban van, vagy a részben már kinyitott és még félre nem tett dobozban.

Mindkét esetben sikerült két óriás dobozra szűkítenünk a lehetőségeket, ráadásul e két doboz közül legalább az egyiket már kinyitottuk.

Végül a megmaradt két doboz közül vegyük az egyik nyitottat (ha csak egy nyitott van, akkor azt) és nyissuk ki az abban lévő nagy dobozt is. Ha most egy sárga közepes dobozt pillantunk meg, akkor tudjuk, hogy a kicsi sárgának a másik megmaradt dobozban kell lennie, és ahhoz már nem kell nyúlnunk. Ha pedig egy nem sárga közepes dobozt látunk, akkor a másik megmaradt dobozban kell lennie a sárga közepesnek (hiszen a korábban félretett dobozok között van a nagy és az óriási sárga), és akkor a kicsi sárgának abban az óriás dobozban kell lennie, amiben pont most nyitottuk ki a nagy dobozt.

3. Bergengóciában kétféle fizetőeszköz van: garas és tallér. A bergengóc nemzeti bank minden reggel kiírja a két fizetőeszköz közti váltás aznapi arányát (pl: 7 garas = 3 tallér). Andrásnak 1100 garasa és 400 tallérja, Bélának 200 garasa és 1700 tallérja, Csabának 800 garasa és 900 tallérja van.
a) Bizonyítsd be, hogy a bank kiírhat olyan váltási arányt, amelynél Csaba vagyona értékesebb Andrásénál és Béláénál is.
b) Csaba a húgának adott 100 tallért, András és Béla vagyona nem változott. Kiírhat-e most a bank olyan váltási arányt, amelynél hármuk közül még mindig Csaba vagyona a legértékesebb?

Megoldás. Az egyszerűség kedvéért számoljunk forintban és legyen 100 garas g forint, 100 tallér pedig t forint (megengedve, hogy g és t nem feltétlenül egész szám, de feltéve, hogy mindkettő pozitív). A három fiú vagyona forintban kifejezve: $A = 11g + 4t$, $B = 2g + 17t$ és $C = 8g + 9t$.

a) Ha Csaba a leggazdagabb, akkor $C > A$ és $C > B$ is teljesül. Nézzük meg, mit jelent ez g-re és t-re vonatkozóan.

$C = 8g + 9t > A = 11g + 4t \Rightarrow 5t > 3g \Rightarrow \frac{5}{3}t > g$.

$C = 8g + 9t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 8t \Rightarrow g > \frac{4}{3}t$.

A kapott feltételrendszer egy megoldása $t = 2, g = 3$, mert ekkor $C = 8g + 9t = 4200$, $A = 11g + 4t = 4100$ és $B = 2g + 17t = 4000$ és tényleg C a legnagyobb.

Átváltási arányként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy két garas egyenlő három tallérral.

b) **1. megoldás** Most az előző feltételek egy kicsit módosulnak.

$C = 8g + 8t > A = 11g + 4t \Rightarrow 4t > 3g \Rightarrow \frac{4}{3}t > g$.

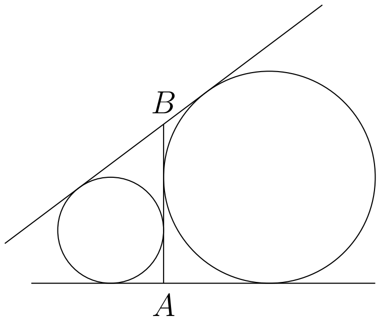
$C = 8g + 8t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 9t \Rightarrow g > \frac{3}{2}t$. Ez azt jelentené, hogy

$$\frac{4}{3}t > g > \frac{3}{2}t,$$

ami nem lehetséges, hiszen $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ és feltettük, hogy t pozitív, vagyis a pénzeknek van értéke. Tehát a b) feltételnek megfelelő átváltási arány nem létezik.

2. megoldás Tegyük fel, hogy Csaba vagyona a legértékesebb, azaz $C > A$, és $C > B$.

Ekkor az is igaz, hogy $3C > 2A + B$, ami azt jelentené, hogy 2400 garas +2400 tallér > 2400 garas +2500 tallér, ami nem lehetséges.



4. Két kör érint két egyenest és a két egyenest összekötő AB szakaszt. Az AB szakasz merőleges az A pontot tartalmazó egyenesre. Bizonyítsd be, hogy a két kör sugarának összege egyenlő az AB szakasz hosszával!

Megoldás. Két egyszerű állítást többször is használni fogunk a megoldásban.

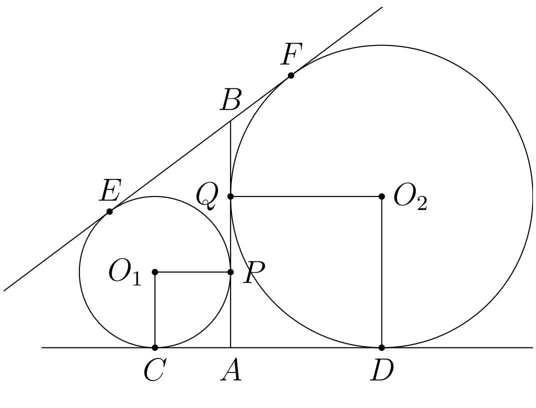
- Ha egy külső pontból érintőket húzunk egy körhöz, akkor a külsö ponttól az érintési pontokig tartó érintőszakaszok hossza egyenlő.

  Ez egyszerű következménye annak, hogy a kör középpontját a külső ponttal összekötő egyenesre szimmetrikus a két érintőszakasz.

- Ha egy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egymásra merőlegesek, akkor az érintőszakaszok hossza egyenlő a kör sugarával.

  Ez azért igaz, mert a kör középpontja, a két érintési pont és a külső pont együtt egy négyzet négy csúcsa, hiszen egy olyan négyszöget határoznak meg, amelynek három szögéről tudjuk, hogy derékszög, és van két szomszédos oldala, amelyek hossza egyenlő.

Elnevezzük az ábrán az összes érintési pontot illetve a körök középpontját, majd alkalmazzuk a fenti állításokat. Az O_1 középpontú kör sugara r, az O_2 középpontú kör sugara R.



Mivel O_1CAP és ADO_2Q négyzetek, ezért $CA = r$ és $DA = R$, tehát $CD = CA + AD = r + R$. Az O_1O_2 egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el a CD és EF érintőszakaszok, ezért $EF = CD = r+R$. Az AB szakasz hosszát kétféle módon kifejezve és az első segédállítást használva:

$$AB+AB = (AP+PB)+(AQ+QB) = AC+BE+AD+BF = (AC+AD)+(BE+BF) = 2(r+R),$$

tehát $AB = r + R$.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

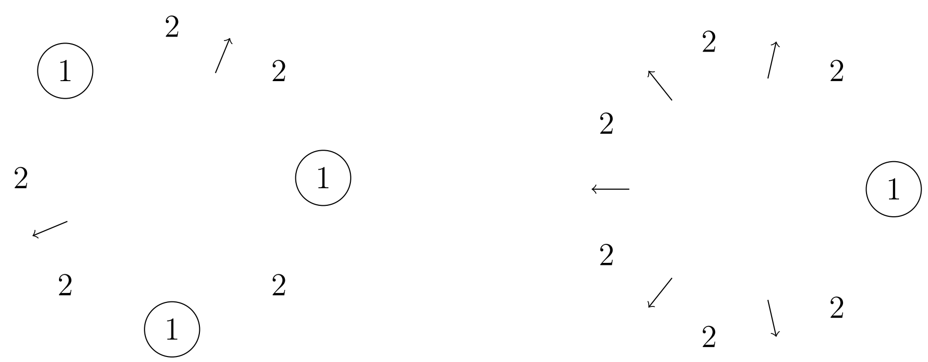
5. Egy iskola fekvőtámaszversenyt rendez. Az első fordulóban 8 gyerek áll fel egy körben. Minden fordulóban 1 perc alatt kell minél több fekvőtámaszt megcsinálni. Aki mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt csinál, annak a forduló végén ki kell állnia a körből. Viszont ha egy forduló végén két szomszédos gyerek egyikének sem kell kiállnia a körből, akkor a két gyerek közé egy újabb gyereket állítanak. A versenynek vége van, ha egy forduló után legfeljebb 3 gyerek áll a körben.
Lehet-e olyan forduló a verseny folyamán, amelyben pontosan

(a) 11 (b) 12

gyerek áll a körben?

Megoldás. a) Lehetséges. Ha az első fordulóban három gyerek esik ki (és így kettő lép be), a másodikban pedig egy esik ki (és így öt lép be), akkor a második forduló után pontosan 11-en állnak a körben.

Az alábbi ábrán karikázva jelöljük a kieső gyerekeket és nyíllal azokat a pozíciókat, ahova új gyerek fog belépni. A számérték azt mutatja, hogy hány fekvőtámaszt csinált az adott fordulóban az adott pozíción lévő gyermek.



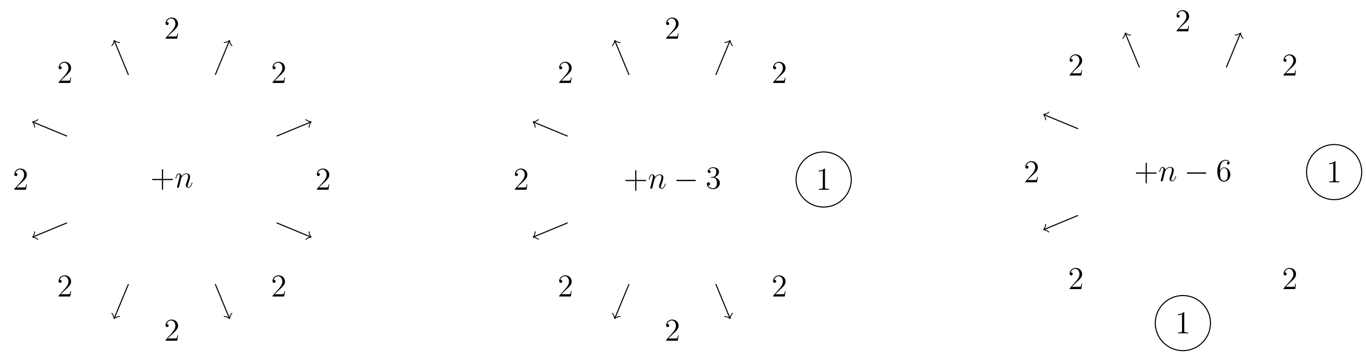
b) Nem lehetséges. Azt fogjuk vizsgálni, hogy mennyivel változhat a gyerekek száma egy fordulóban.

Ha senki nem esik ki, akkor bármely két gyerek közé belép egy új. Ha eredetileg n gyerek állt a körben, akkor a forduló után ez n-nel nő.

Ha pont egy gyerek esett ki, akkor az előbbiekhez képest ez 3-mal kisebb növekményt jelent, mert a kieső ember mellett még elvesztünk két belépőt is, akik kieső gyerek és a szomszédai közé léptek volna be.

Minden újabb kieső gyermek további hárommal csökkenti a növekményt (megengedve a negatív növekményt, vagyis a csökkenést is). Ez azért igaz, mert a kiesők (karikázottak) soha nem lehetnek szomszédosak körben, hiszen két szomszédos gyemek közül csak az egyik csinálhatott kevesebb fekvőtámaszt a másiknál.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



Általánosságban ha egy fordulóban n gyerek áll a körben és közülük m fog kiesni (mert mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt nyom, vagyis „karikázott”), akkor a következő fordulóban $n + (n - 3m) = 2n - 3m$ gyerek lesz a körben (feltéve, hogy kezdetben n több volt mint 3, és azt, hogy m nem több, mint n fele, hiszen szomszédos gyerekek nem eshetnek ki).

A lényeges észrevétel az, hogy a létszám változása $(n - 3m)$ és a jelenlegi létszám (n) 3-mal osztva azonos maradékot ad. (Itt a változást előjeles értékként értjük, azaz -2 hárommal osztva 1-et ad maradékul.)

Mivel kezdetben 8 gyerek áll a körben, és 8 hármas maradéka 2, ezért a második fordulóban a létszám hármas maradéka biztosan 1 ($2 + 2 = 4$ 1 maradékot ad hárommal). Tovább folytatva a harmadik fordulóban a létszám hármas maradéka biztosan $1 + 1 = 2$. Innen a létszám hármas maradéka már ismétlődik: $2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$ és látható, hogy a maradék soha nem lesz nulla, tehát a létszám soha nem lehet 12.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.