TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2020. november 6.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Zoltánnak három lánya van: Anni, Bogi és Cili. Zoltán most éppen annyi idős, mint a három lánya életkora összeadva. 11 év múlva már csak Anni és Bogi (akkori) életkorát kell összeadni, hogy megkapjuk Zoltán életkorát. 13 év múlva Anni és Cili életkorát összeadva lehet majd megkapni Zoltán életkorát; 16 év múlva pedig Bogi és Cili életkorát összeadva. Hány éves most Zoltán?

1. Megoldás

A feladat feltételeiből tudjuk, hogy

- $Z = A + B + C$
- $(Z + 11) = (A + 11) + (B + 11)$
- $(Z + 13) = (A + 13) + (C + 13)$
- $(Z + 16) = (B + 16) + (C + 16)$

Ha a három jövőbeli időpontban összeadjuk Zoltán életkorát (vagyis a 2.,3. és 4. egyenlőség bal oldalát), akkor mostani életkorának háromszorosánál 40-nel ($= 11 + 13 + 16$) többet kapunk: $3Z + 40$.

Ha ugyanezt a feltételekben szereplő lányok életkorával tesszük meg (vagyis a 2., 3. és 4. egyenlőség bal oldala), akkor minden lány jelenlegi életkora kétszer szerepel az összegben és még 80 ($= 11 + 11 + 13 + 13 + 16 + 16$): $2A + 2B + 2C + 80$.

Az első feltételből miatt $2A + 2B + 2C + 80 = 2Z + 80$

Tehát $3Z + 40 = 2Z + 80$, ami azt jelenti, hogy Zoltán 40 éves most.

2. Megoldás

A feladat feltételeiből tudjuk, hogy

- $Z = A + B + C$
- $(Z + 11) = (A + 11) + (B + 11)$
- $(Z + 13) = (A + 13) + (C + 13)$
- $(Z + 16) = (B + 16) + (C + 16)$

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Az első két feltételt összeadva: $Z + (A + 11) + (B + 11) = A + B + C + (Z + 11)$

Ebből kiszámolható, hogy $C = 11$

Az első és harmadik feltételt összeadva: $Z + (A + 13) + (C + 13) = A + B + C + (Z + 13)$

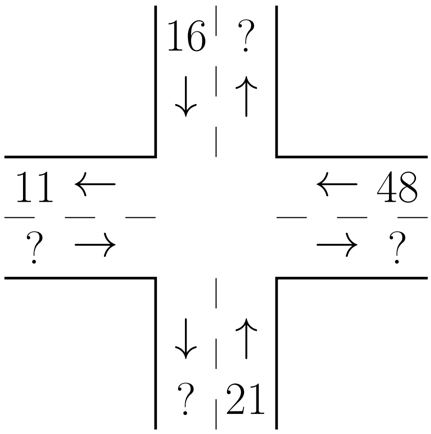
Ebből kiszámolható, hogy $B = 13$

Az első és negyedik feltételt összeadva: $Z + (B + 16) + (C + 16) = A + B + C + (Z + 16)$

Ebből kiszámolható, hogy $A = 16$

Mivel $Z = A + B + C$, ezért Zoltán 40 éves.

2. Egy kereszteződésben forgalomfelmérést tartottak. A vizsgált időszakban pontosan 100 autó haladt át a kereszteződésen, ezek közül 10 balra és 27 jobbra kanyarodott, a többi egyenesen ment át. A kereszteződés minden kifelé illetve befele menő sávjában egy-egy műszer mérte az elhaladó autók számát. Sajnos a nyolc műszerből csak négy működött, az ezek által számolt autók számát az ábra mutatja. Határozd meg a négy hiányzó értéket.



1. Megoldás Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, az ábrán „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

Vizsgáljuk meg, hogy az ábrán „jobbról” érkező 48 autó merre hagyhatta el a kereszteződést. Legfeljebb 11 mehetett egyenesen, mert „balra” annyi hagyta el a kereszteződést. Azt is tudjuk, hogy legfeljebb $10 + 27 = 37$ autó kanyarodhatott valamerre. Ezen számok összege éppen 48, így minden irányba pontosan a fenti darabszámú autó ment. Vagyis a „jobbról” jövő autók közül 27 jobbra kanyarodott, 11 egyenesen áthaladt, 10 pedig balra kanyarodott.

Így viszont az összes többi autó egyenesen haladt át a kereszteződésen, így egyszerű összegzéssel megkapjuk a hiányzó értékeket.

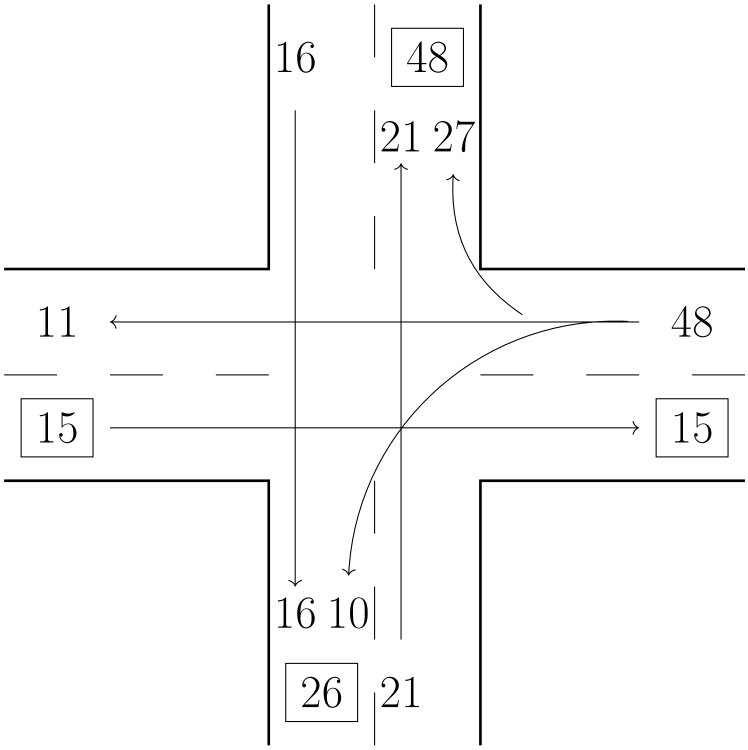
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Megoldás Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

Mivel balra 10, jobbra pedig 27 autó kanyarodott, ezért a fennmaradó $100 - 10 - 27 = 63$ autó egyenesen haladt át.

Ezen egyenesen áthaladó autók közül, a megadott számok alapján, az ábrán „fentről” legfeljebb 16, „balról” 15, „lentről” 21 érkezett, „jobbról” pedig legföljebb 11, mert ennyi hagyhatja csak el a kereszteződést „balra”. Ezen számok összege épp 63, tehát a fenti irányokból pontosan ennyi autó haladt át egyenesen.

Innentől a hiányzó értékeket egyértelműen ki tudjuk tölteni.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. A labdafalvi focicsapatnak 11 tagja van, és 1-től 11-ig számozott mezeket használnak. A pólón és a nadrágon is szerepel a mezszám. A mai edzés előtt azonban a szertáros összekeverte a nadrágokat, így minden játékosnak más szám van a nadrágján, mint a pólóján. Minden játékos összeadta a pólóján és a nadrágján szereplő számot.
a) Lehetséges-e, hogy mind a 11 játékos páratlan számot kapott összegként?
b) Lehetséges-e, hogy senki nem kapott 3-mal osztható számot összegként?

Megoldás.

a) Nem lehetséges.

1-től 11-ig öt páros és hat páratlan szám van.

A hat páratlan számú póló közül legfeljebb öt olyan lehet, amelyikhez páros számú nadrágot párosítottak. Ezért lesz legalább egy olyan játékos, akinek a pólóján és a nadrágján egyaránt páratlan szám áll.

Mivel két páratlan szám összege biztosan páros, így ez a játékos nem kaphatott páratlan számot összegként.

b) Igen, lehetséges. Például:

nadrág	1	4	7	10	2	5	8	11	3	6	9
póló	3	6	9	1	5	8	11	2	4	7	10
összeg	4	10	16	11	7	13	19	13	7	13	19

4. Anna mindegyik háromjegyű pozitív egész szám esetén kiszámolta a számjegyek szorzatát, és az így kapott 900 darab eredményt leírta egymás után egy sorba.
Hányszor fordul elő, hogy két szomszédos eredmény között 36 a különbség?

Megoldás. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a szomszédos számok közül a kisebbik 9-re végződik-e, vagy nem.

- Ha a kisebbik szám 9-re végződik, akkor a rákövetkező nullára, így a számjegyszorzatok különbsége megegyezik a kisebbik (9-re végződő) szám jegyeinek szorzatával. Akkor lesz ez 36, ha az első két jegy szorzata négy. Ez három esetben fordul elő: 149, 229, 419.
- Ha a kisebbik szám utolsó jegye 9-nél kisebb (mondjuk c), akkor a rákövetkező utolsó jegye $c+1$. Az első két jegy ilyenkor azonos, és a számjegyszorzatok különbsége éppen az első két jegy szorzata (például $267 \to 268 \Rightarrow 2\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 6\cdot 7 = 2\cdot 6\cdot 1$).
  Két számjegy szorzata az alábbi esetekben lehet 36: $4\cdot 9$, $6\cdot 6$, $9\cdot 4$. A kisebbik szám utolsó jegye pedig 9-től különbözik, tehát a $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ halmaz eleme.
  Ez összesen $3\cdot 9 = 27$ lehetőség. (490,491,…, 498, 660, 661,…,668,940,941,…, 948)

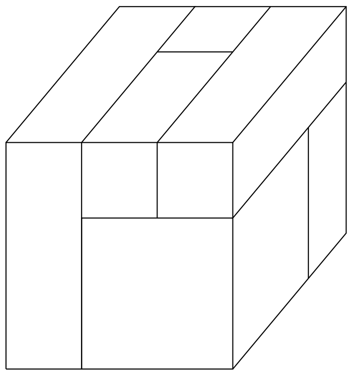
Tehát összesen $3+27=30$ esetben fordul elő, hogy a szomszédos számok számjegyszorzatának különbsége 36.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy 3 cm élhosszúságú tömör kockát szeretnénk olyan téglatestekből felépíteni, amelyeknek minden élhosszúsága cm-ben mérve egész szám. Ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy a téglatestek között semelyik kettő ne legyen egyforma alakú.
   Fel tudjuk-e a kockát építeni
   a) 6 db
   b) 7 db téglatestből, ezen szabályok betartásával?

   Megoldás.

   a) Lehetséges. A következő téglatesteket használjuk: $1\times1\times1$, $1\times1\times2$, $1\times1\times3$, $1\times2\times2$, $2\times2\times2$, $1\times3\times3$. (Ettől lényegében különböző megoldás nem létezik.)



   b) Nem lehetséges.

   A következő téglatestek jöhetnek szóba:

a	b	c	térfogat (cm^3)
1	1	1	1
1	1	2	2
1	1	3	3
1	2	2	4
1	2	3	6
1	3	3	9
2	2	2	8
2	2	3	12
2	3	3	18
3	3	3	27

   A hét legkisebb lehetséges téglatest térfogatának összege $1+2+3+4+6+8+9=33$.

   Ez több, mint a kocka térfogata (27).

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő