TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

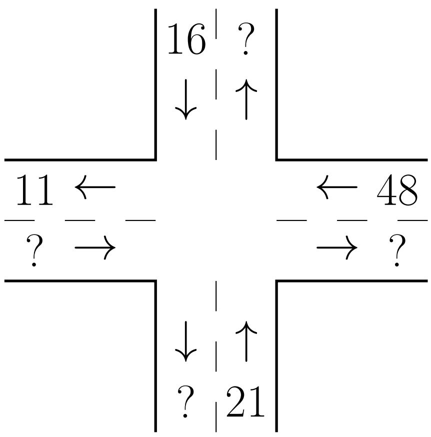
49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2020. november 6.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy kereszteződésben forgalomfelmérést tartottak. A vizsgált időszakban pontosan 100 autó haladt át a kereszteződésen, ezek közül 10 balra és 27 jobbra kanyarodott, a többi egyenesen ment át. A kereszteződés minden kifelé illetve befele menő sávjában egy-egy műszer mérte az elhaladó autók számát. Sajnos a nyolc műszerből csak négy működött, az ezek által számolt autók számát az ábra mutatja. Határozd meg a négy hiányzó értéket.



1. Megoldás Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, az ábrán „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

Vizsgáljuk meg, hogy az ábrán „jobbról” érkező 48 autó merre hagyhatta el a kereszteződést. Legfeljebb 11 mehetett egyenesen, mert „balra” annyi hagyta el a kereszteződést. Azt is tudjuk, hogy legfeljebb $10 + 27 = 37$ autó kanyarodhatott valamerre. Ezen számok összege éppen 48, így minden irányba pontosan a fenti darabszámú autó ment. Vagyis a „jobbról” jövő autók közül 27 jobbra kanyarodott, 11 egyenesen áthaladt, 10 pedig balra kanyarodott.

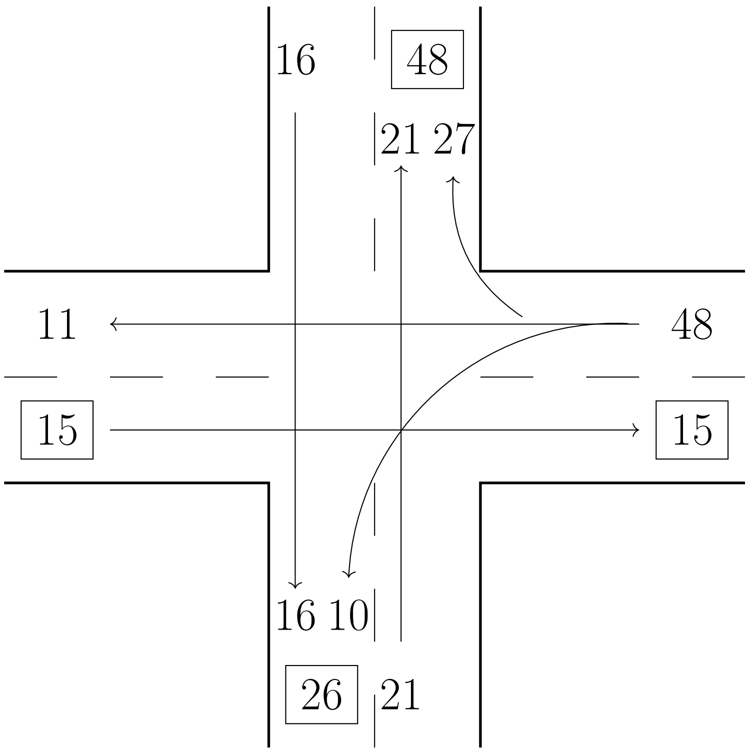
Így viszont az összes többi autó egyenesen haladt át a kereszteződésen, így egyszerű összegzéssel megkapjuk a hiányzó értékeket.

2. Megoldás Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

Mivel balra 10, jobbra pedig 27 autó kanyarodott, ezért a fennmaradó $100 - 10 - 27 = 63$ autó egyenesen haladt át.

Ezen egyenesen áthaladó autók közül, a megadott számok alapján, az ábrán „fentről” legfeljebb 16, „balról” 15, „lentről” 21 érkezett, „jobbról” pedig legföljebb 11, mert ennyi hagyhatja csak el a kereszteződést „balra”. Ezen számok összege épp 63, tehát a fenti irányokból pontosan ennyi autó haladt át egyenesen.

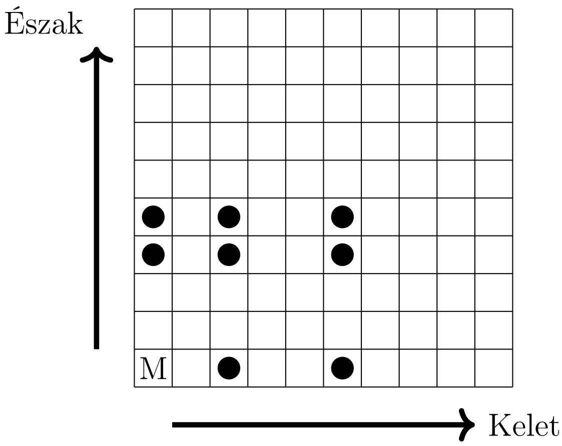
Innentől a hiányzó értékeket egyértelműen ki tudjuk tölteni.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. A Százmezős Pagony az ábra szerint fel van osztva 10×10 mezőre. A délnyugati sarokmezőben lakik egy varázsmanó, a többi 99 mezőben egy-egy kincs van, melyek közül a manó szeretne minél többet összegyűjteni. Délelőttönként nyugatról fúj a szél, ilyenkor léghajójával 2 vagy 5 mezővel keletebbre tud leszállni. Délutánonként déli irányból fúj a szél, ha ilyenkor száll fel, akkor léghajójával 3 vagy 4 mezővel északabbra tud eljutni. Nem kell mindkét napszakban felszállnia. (Az ábrán bejelöltük azt a nyolc mezőt, ahová egy nap alatt el tud jutni). A varázsmanó léghajóval nyugati vagy déli irányba nem tud utazni, de ha néhány napnyi utazás után csettint egyet, akkor egyből visszakerül (a léghajójával együtt) a bal alsó mezőbe.

   Legfeljebb hány kincset tud a manó így összegyűjteni?



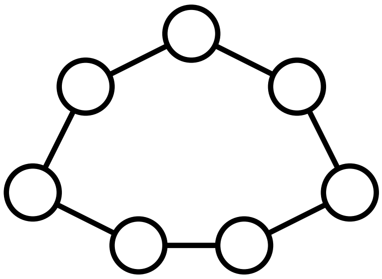
Megoldás. Mivel a manó dönthet úgy, hogy csak délelőtt vagy csak délután száll fel, ezért elég külön-külön megnézni, hogy melyik o oszlopokba, és melyik s sorokba tud eljutni. Ha ezt már tudjuk, akkor ezekből alkotható összes rendezett (o, s) pár olyan mezőt ír le, ahova a manó el tud jutni, és csak ezek a mezők érhetők el.

Az elérhető oszlopok sorszáma (balról jobbra számozva) $1+a\cdot 2+b\cdot 5$ alakú, ahol a és b nemnegatív egész. a legfeljebb 4, b legfeljebb 1. Az összes eset könnyen végignézhető, az elérhető oszlopok sorszáma: $\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Az elérhető sorok sorszáma (alulról felfelé számozva) $1+c\cdot 3+d\cdot 4$ alakú, ahol $0 \leq c \leq 3$ és $0 \leq d \leq 2$ egészek. Az eseteket végignézve kapjuk, hogy az elérhető sorok sorszáma: $\{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

A bevezető megjegyzés alapján a 8 elérhető oszlop és a 7 elérhető sor összesen $8 \cdot 7 = 56$ elérhető mezőt jelent, de a bal alsó mező nem rejt kincset, ezért a manó összesen 55 kincset tud összegyűjteni.

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok közül kiválasztottunk hetet, és beírtuk őket egy-egy karikába. Minden beírt számra igaz, hogy a két szomszédos karikába írt szám szorzatát maradék nélkül eloszthatjuk vele. Hányféleképpen tölthettük ki az ábrát?



Megoldás.

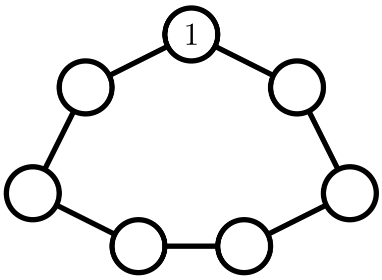
Az 5 és a 7 nem szerepelhet benne, mert 1-től 9-ig csak egyetlen számot osztanak, ezért nem osztói semelyik másik két számjegy szorzatának.

A hét karikába tehát az 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 számokat kell beírni valamilyen sorrendben.

A 9 csak a 3 és a 6 között lehet, mert más párok esetén a szorzat nem osztható 9-cel.

A 8-as számnak egyik oldalán a 4-esnek kell állnia, a másik oldalán a 2-esnek vagy a 6-osnak. Így három páros szám egymás mellett van, ezért a negyedik páros számnak ezek mellett kell helyet foglalnia, vagyis a három páratlan szám is egymás mellett van. Ahhoz, hogy az 1, 3 és 9 egymás mellett legyen, valamint a 9-es a 3-as és a 6-os között legyen, a négy számnak 1, 3, 9, 6 sorrendben kell egymást követnie.

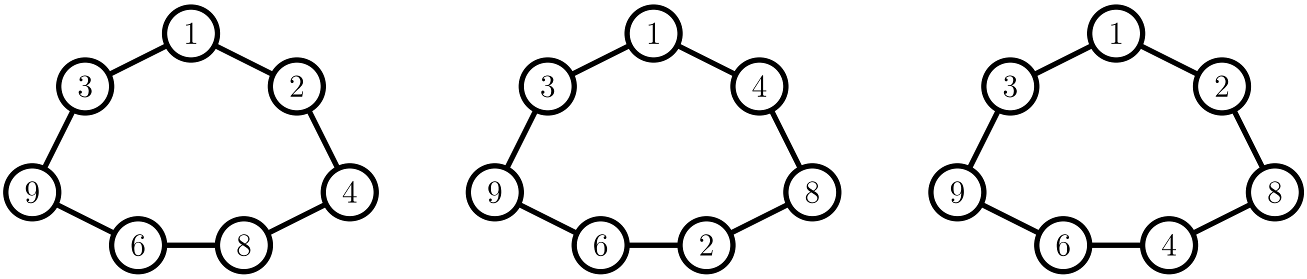
Számoljuk meg először azokat a megoldásokat, amelyekben az 1-es szerepel a felső karikában.



Tegyük fel, hogy a 3 az 1 bal szomszédja az ábrán, és írjuk be 9-et és a 6-ot is.

Ezután már csak azt kell garantálni, hogy a 8 egyik szomszédja a 4 legyen, a másik szomszédja pedig páros. Így három megoldást kapunk:

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



Ha a 3 az 1 jobb szomszédja, akkor az előző megoldások tükörképeit kapjuk. Így összesen hat olyan kitöltés van, amelyben az 1-es áll a felső karikában.

Végül vegyük észre, hogy:

- egy helyes kitöltés 6 (önmagával együtt 7) „elforgatottja" is helyes megoldás (és ezek egymástól különböző kitöltések)
- minden helyes kitöltés megkapható így.

Így összesen $6 \cdot 7 = 42$ jó kitöltés létezik.

4. Egy órának három mutatója van (kis-, nagy- és másodpercmutató), amelyek folyamatosan járnak. Az órában lévő elem kezd lemerülni, ezért az óra lelassul, ha valamelyik mutatója emelkedik. Ha csak egy mutató emelkedik, akkor az óra az eredeti sebességének felével jár, ha két mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség negyedével jár, ha pedig mindhárom mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség nyolcadával jár az óra. (Egy mutató akkor emelkedik, ha a hatost már elhagyta, de a tizenkettest még nem érte el.)
Kezdetben mindhárom mutató legfelül, a tizenkettesen áll. Legkorábban hány óra múlva áll elő újra ugyanez a helyzet?

   1. megoldás A másodpercmutatónak $60 \cdot 12 = 720$ kört kell megtennie, hogy a mutatók visszatérjenek eredeti helyzetükbe, mert 60 kör egy „órával" mozdítatja el a nagymutatót és ezt 12-szer kell megismételni. (Az idézőjeles „óra" itt a nagymutató által megtett egy teljes kört jelent.)

   Azt fogjuk nézni, hogy a kismutató és a nagymutató helyzetétől függően hány másodperc alatt tesz meg egy kört a másodpercmutató. Felhasználjuk, hogy a másodpercmutató egy teljes köre alatt az nem változik, hogy a másik két mutató „felfele" vagy „lefele" mozog.

   Amikor a nagymutató és a kismutató is lefele megy, akkor a másodpercmutató az első félkört lefelé teszi meg, tehát „valódi" időben, 30 mp alatt végez vele. A második félkörben felfele megy, ezért fele olyan gyors, így ehhez 60 mp kell. Így kapjuk összesen a 90 mp-es köridőt.

   Ha nagymutató és a kismutató közül az egyik lefele, a másik felfele megy, akkor 180 mp alatt ér a másodpercmutató körbe. Ha pedig mindkét mutató felfele megy, akkor 360 mp.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Az hogy a nagy- és a kismutató lefele menjen, az 6 „órában” fordul elő, és minden „órának” az első 30 „percében”. Vagyis 180 körben fog mindkét mutató lefele menni. Ugyanígy kiszámolható, hogy 180 körben megy mindkét mutató felfelé. A maradék 360 körben az egyik mutató lefele, a másik felfele fog menni.

Foglaljuk táblázatba a különböző eseteket:

kismutató és nagymutató	körök száma	a másodpercmutató egy körének ideje
le, le	180	90 mp
fel, le	180	180 mp
le, fel	180	180 mp
fel, fel	180	360 mp

Összességében $180 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ másodperc telik el, amíg a mutatók visszatérnek eredeti helyzetükbe.

Ez $3 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ perc, tehát $3 \cdot (\frac{3}{2} + 3 + 3 + 6) = 40{,}5$ óra.

Tehát 40 és fél óra után áll vissza az eredeti állapot.

2. megoldás A mutatók egymáshoz képest ugyanúgy mozognak, mint egy pontosan járó óránál. Legközelebb akkor lesz mindhárom mutató a 12-esen, ha a kismutató egyszer körbeért. Ez háromszor annyi idő, mint amennyi alatt leér a 6-osig, hiszen a táv másik felén minden fele akkora sebességgel történik.

Ahhoz, hogy a kismutató leérjen a 6-oshoz, a nagymutatónak 6 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör háromszor annyi idő, mint amennyi alatt a nagymutató leér a 6-osig – a fentiekhez hasonlóan.

Ahhoz, hogy a nagymutató leérjen a 6-osig, a másodpercmutatónak 30 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör $3 \cdot 30$ másodperc (a kis- és nagymutatók még lefelé haladnak).

Tehát a körbeéréshez szükséges idő $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 30 = 145800$ másodperc, azaz 40,5 óra.

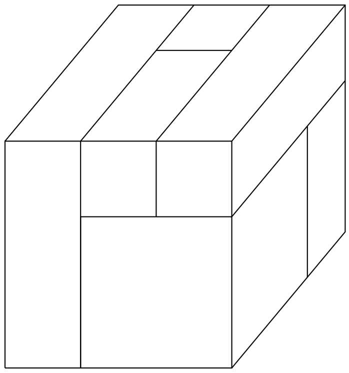
Megjegyzés: A feladat mélyén a következő észrevétel rejlik: mindegyik mutató a mozgása során az út egyik felét fele olyan lassan teszi meg, mint a másikat, így a mozgása másfélszer olyan hosszú ideig tart, mint normálisan. Mivel a mutatók mozgása egymástól „független”, és a mutatók egymást is lassítják, így ezek a másfélszeres szorzók összeszorzódnak, tehát a körbeééréshez szükséges idő az eredeti $1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 27/8$-szorosa, ami végeredményként $12 \cdot 27/8 = 81/2 = 40,5$ órát ad.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy 3 cm élhosszúságú tömör kockát szeretnénk olyan téglatestekre felbontani, amelyeknek minden élhosszúsága egész. Ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy a téglatestek között semelyik kettő ne legyen egyforma alakú.
Legfeljebb hány téglatestre tudjuk felbontani a kockát ezen szabályok betartásával?

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy 6 téglatestre fel tudjuk bontani.

A következő téglatesteket használjuk: $1 \times 1 \times 1$, $1 \times 1 \times 2$, $1 \times 1 \times 3$, $1 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 2$, $1 \times 3 \times 3$. (Ettől lényegében különböző konstrukció nem létezik.)



Most pedig lássuk be, hogy 7 téglatestre nem lehet felbontani. A következő téglatestek jöhetnek szóba:

a	b	c	térfogat (cm^3)
1	1	1	1
1	1	2	2
1	1	3	3
1	2	2	4
1	2	3	6
1	3	3	9
2	2	2	8
2	2	3	12
2	3	3	18
3	3	3	27

A hét legkisebb lehetséges téglatest térfogatának összege $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 = 33$.

Ez több, mint a kocka térfogata (27).

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.