TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

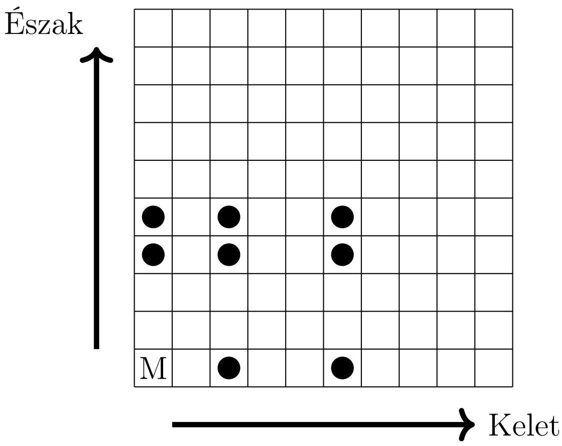
Országos döntő – 2020. november 6.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. A Százmezős Pagony az ábra szerint fel van osztva 10×10 mezőre. A délnyugati sarokmezőben lakik egy varázsmanó, a többi 99 mezőben egy-egy kincs van, melyek közül a manó szeretne minél többet összegyűjteni. Délelőttönként nyugatról fúj a szél, ilyenkor léghajójával 2 vagy 5 mezővel keletebbre tud leszállni. Délutánonként déli irányból fúj a szél, ha ilyenkor száll fel, akkor léghajójával 3 vagy 4 mezővel északabbra tud eljutni. Nem kell mindkét napszakban felszállnia. (Az ábrán bejelöltük azt a nyolc mezőt, ahová egy nap alatt el tud jutni). A varázsmanó léghajóval nyugati vagy déli irányba nem tud utazni, de ha csettint egyet, akkor egyből visszakerül (a léghajójával együtt) a bal alsó mezőbe.

   Legfeljebb hány kincset tud a manó így összegyűjteni?



Megoldás. Mivel a manó dönthet úgy, hogy csak délelőtt vagy csak délután száll fel, ezért elég külön-külön megnézni, hogy melyik o oszlopokba, és melyik s sorokba tud eljutni. Ha ezt már tudjuk, akkor ezekből alkotható összes rendezett (o, s) pár olyan mezőt ír le, ahova a manó el tud jutni, és csak ezek a mezők érhetők el.

Az elérhető oszlopok sorszáma (balról jobbra számozva) $1+a\cdot 2+b\cdot 5$ alakú, ahol a és b nemnegatív egész. a legfeljebb 4, b legfeljebb 1. Az összes eset könnyen végignézhető, az elérhető oszlopok sorszáma: $\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Az elérhető sorok sorszáma (alulról felfelé számozva) $1+c\cdot 3+d\cdot 4$ alakú, ahol $0 \leq c \leq 3$ és $0 \leq d \leq 2$ egészek. Az eseteket végignézve kapjuk, hogy az elérhető sorok sorszáma: $\{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

A bevezető megjegyzés alapján a 8 elérhető oszlop és a 7 elérhető sor összesen $8 \cdot 7 = 56$ elérhető mezőt jelent, de a bal alsó mező nem rejt kincset, ezért a manó összesen 55 kincset tud összegyűjteni.

2. Egy háromszög egy magasságvonalát *nagyranőtt*nek nevezzük, ha legalább 10 cm hosszú.
Mi egy olyan háromszög területének legkisebb lehetséges értéke, amelynek két nagyranőtt magasságvonala is van?

Megoldás. Legyen a két nagyranőtt magasságvonal hossza $m_a \geq 10$ és $m_b \geq 10$.

Egy tetszőleges háromszögben $b \geq m_a$, $c \geq m_a$, $a \geq m_b$, $c \geq m_b$. Ez abból következik, hogy egy adott csúcshoz legközelebb eső pontja a vele szemközt lévő oldalegyenesnek az, amellyel az őket összekötő szakasz merőleges az egyenesre.

Innen $a \geq m_b \geq 10 \Rightarrow T = \frac{a \cdot m_a}{2} \geq \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2$.

Az alsó becslés éles, megvalósul abban a derékszögű háromszögben, amelynek mindkét befogója 10 cm hosszú.

Tehát a legkisebb lehetséges terület 50 cm ^{2}.

3. Egy órának három mutatója van (kis-, nagy- és másodpercmutató), amelyek folyamatosan járnak. Az órában lévő elem kezd lemerülni, ezért az óra lelassul, ha valamelyik mutatója emelkedik. Ha csak egy mutató emelkedik, akkor az óra az eredeti sebességének felével jár, ha két mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség negyedével jár, ha pedig mindhárom mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség nyolcadával jár az óra. (Egy mutató akkor emelkedik, ha a hatost már elhagyta, de a tizenkettest még nem érte el.)
Kezdetben mindhárom mutató legfelül, a tizenkettesen áll. Legkorábban hány óra múlva áll elő újra ugyanez a helyzet?

1. megoldás A másodpercmutatónak $60 \cdot 12 = 720$ kört kell megtennie, hogy a mutatók visszatérjenek eredeti helyzetükbe, mert 60 kör egy „órával” mozdítatja el a nagymutatót és ezt 12-szer kell megismételni. (Az idézőjeles „óra” itt a nagymutató által megtett egy teljes kört jelent.)

Azt fogjuk nézni, hogy a kismutató és a nagymutató helyzetétől függően hány másodperc alatt tesz meg egy kört a másodperc mutató. Felhasználjuk, hogy a másodpercmutató egy teljes köre alatt az nem változik, hogy a másik két mutató „felfele” vagy „lefele” mozog.

Amikor a nagymutató és a kismutató is lefele megy, akkor a másodpercmutató az első félkört lefelé teszi meg, tehát „valódi” időben, 30 mp alatt végez vele. A második félkörben felfele megy, ezért fele olyan gyors, így ehhez 60 mp kell. Így kapjuk összesen a 90 mp-es köridőt.

Ha nagymutató és a kismutató közül az egyik lefele, a másik felfele megy, akkor 180 mp alatt ér a másodpercmutató körbe. Ha pedig mindkét mutató felfele megy, akkor 360 mp.

Az hogy a nagy- és a kismutató lefele menjen, az 6 „órában” fordul elő, és minden „órának” az első 30 „percében”. Vagyis 180 körben fog mindkét mutató lefele menni. Ugyanígy kiszámolható, hogy 180 körben megy mindkét mutató felfelé. A maradék 360 körben az egyik mutató lefele, a másik felfele fog menni.

Foglaljuk táblázatba a különböző eseteket:

kismutató és nagymutató	körök száma	a másodpercmutató egy körének ideje
le, le	180	90 mp
fel, le	180	180 mp
le, fel	180	180 mp
fel, fel	180	360 mp

Összességében $180 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ másodperc telik el, amíg a mutatók visszatérnek eredeti helyzetükbe.

Ez $3 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ perc, tehát $3 \cdot (\frac{3}{2} + 3 + 3 + 6) = 40{,}5$ óra.

Tehát 40 és fél óra után áll vissza az eredeti állapot.

2. megoldás A mutatók egymáshoz képest ugyanúgy mozognak, mint egy pontosan járó óránál. Legközelebb akkor lesz mindhárom mutató a 12-esen, ha a kismutató egyszer körbeért. Ez háromszor annyi idő, mint amennyi alatt leér a 6-osig, hiszen a táv másik felén minden fele akkora sebességgel történik.

Ahhoz, hogy a kismutató leérjen a 6-oshoz, a nagymutatónak 6 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör háromszor annyi idő, mint amennyi alatt a nagymutató leér a 6-osig – a fentiekhez hasonlóan.

Ahhoz, hogy a nagymutató leérjen a 6-osig, a másodpercmutatónak 30 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör $3 \cdot 30$ másodperc (a kis- és nagymutatók még lefelé haladnak).

Tehát a körbeéréshez szükséges idő $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 30 = 145800$ másodperc, azaz 40,5 óra.

Megjegyzés: A feladat mélyén a következő észrevétel rejlik: mindegyik mutató a mozgása során az út egyik felét fele olyan lassan teszi meg, mint a másikat, így a mozgása másfélszer olyan hosszú ideig tart, mint normálisan. Mivel a mutatók mozgása egymástól „független”, és a mutatók egymást is lassítják, így ezek a másfélszeres szorzók összeszorzódnak, tehát a körbeééréshez szükséges idő az eredeti $1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 27/8$-szorosa, ami végeredményként $12 \cdot 27/8 = 81/2 = 40,5$ órát ad.

4. Öt különböző pozitív egész számot *ördögi ötös*nek nevezünk, ha igaz rájuk a következő tulajdonság: akárhogyan is választunk ki az öt szám közül kettőt, ezek szorzata mindig osztója a maradék három szám szorzatának. Adj meg egy ördögi ötöst úgy, hogy abban a legnagyobb szám a lehető legkisebb legyen!
Megoldásként elegendő egy jó ördögi ötöst megadnod, nem kell szövegesen indokolnod, hogy tényleg ördögi ötöst alkotnak. Azonban javasoljuk, hogy magadnak alaposan ellenőrizd az oszthatósági feltétel teljesülését, mert csak valódi ördögi ötösre kaphatsz pontokat.
Minél kisebb az ördögi ötös legnagyobb száma, annál több pontot érhet a megoldásod. Nincs szükség annak indoklására, hogy a legnagyobb szám értéke tovább már nem csökkenthető.

Megoldás. Néhány lehetséges konstrukció:

- **1. konstrukció**: $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$
  Legnagyobb szám: 256
- **2. konstrukció**: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $3 \cdot 5 \cdot 7 = 135$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
  Legnagyobb szám: 210
- **3. konstrukció**: $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 3^2 = 24$, $2^3 \cdot 3 = 36$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^4 \cdot 3^2 = 144$
  Legnagyobb szám: 144
- **4. konstrukció**: $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $3^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$
  Legnagyobb szám: 120
- **5. konstrukció**: $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^4 = 16$, $2^3 \cdot 3 = 24$, $2^4 \cdot 3 = 48$, $2^5 \cdot 3 = 96$
  Legnagyobb szám: 96

Ellenőrizhető, hogy az utolsó konstrukció lesz a legjobb konstrukció, erre a konstrukcióra járt a maximális pontszám.

5. A főnök munkája során négy dossziét használ, melyeket A, B, C és D jelöl. A főnöknek van egy íróasztala, melynek egy fiókja van. A nap kezdetén a dossziék közül néhány a fiókban, néhány pedig az asztalon van egymáson. (Az íróasztalon és a fiókban a négy dosszién kívül nincs semmi.) A dossziékat csak a főnök titkárnője mozgathatja. Amikor a főnök kimondja valamelyik dosszié nevét, akkor a titkárnő a következőt teszi azzal a dossziéval:

   - ha a dosszié nem legfelül van az íróasztalon vagy a fiókban van, akkor ezt a dossziét az íróasztalon legfelülre helyezi,
   - ha pedig a dosszié az íróasztalon legfelül van, akkor beteszi a dossziét a fiókba.

   A főnök azt szereti, ha a nap végén mindegyik dosszié a fiókban van. Ehhez szeretne egy olyan betűsorozatot kitalálni, melyet végigmondva az összes dosszié a fiókba kerül, függetlenül attól, hogy kezdetben hogy voltak elrendezve a dossziék. Létezik-e ilyen betűsorozat?

   1. megoldás. Az $ABAA$ sorozat beteszi A-t a fiókba. Ennek igazolásához kövessük végig, mi a helyzet az egyes utasítások után. Az első lépésben A vagy felülre vagy (ha már eleve ott volt) a fiókba került. A második lépés után biztos, hogy nem A van felül. Emiatt az utolsó két lépés előbb felülre, majd a fiókba teszi A-t.

   Az előbb leírt „algoritmus” segítségével még B-t és C-t is be tudja a főnök tenni a fiókba:

$$ABAABCBBCDCC$$

   A 12 lépés után két lehetséges állapot van. Vagy minden dosszié a fiókba került vagy egyedül D van az asztalon (és így egyben legfelül).

   A befejezés lehetséges például a következő parancsokkal:

$$ADDA$$

   Itt először A felülre került, majd D felülre került, aztán D és A a fiókba.

   Tehát létezik jó betűsorozat, például:

$$ABAABCBBCDCCADDA$$

   2. megoldás. Az $ABCDABCDDCBA$ sorozat megfelelő.

   A második A után az A dosszié legfelül van az asztalon. Ha ugyanis az első A fiókba tette, akkor a második értelemszerűen felülre teszi. Ha viszont az első A után felülre került, akkor a következő lépés ráhelyez egy másikat (B-t), ami nem is kerülhet le róla (hiszen nem ismétlődik a következő A-ig), így a második A ismét felülre fogja helyezni.

   Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy a második B után B, a második C után C, a második D után D lesz legfelül az asztalon. Tehát $ABCDABCD$ után minden dosszié az asztalon van, alulról felfelé A, B, C, D sorrendben. Innen a $DCBA$ sorozat mindent elpakol a fiókba.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő