**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

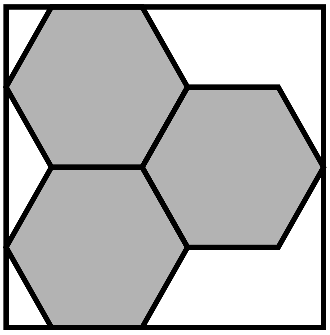
# 49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

## Országos döntő – 2020. november 6.

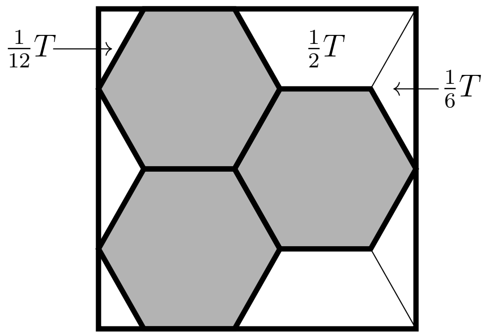
## NYOLCADIK OSZTÁLY

## MEGOLDÁSOK

1. Az ábrán látható módon három egyforma szabályos hatszöget rajzoltam egy téglalapba. Mekkora egy hatszög területe, ha a téglalap területe 80 cm$^2$?



**Megoldás.** Kifejezzük a téglalap területét a hatszög $T$ területével. Ehhez osszuk fel a téglalapot az ábrán látható részekre. A három hatszögön kívül még háromféle részt kaptunk: két derékszögű háromszöget, három egyenlő szárú háromszöget és két húrtrapézt.




A húrtrapézról világos, hogy a hatszög területének a fele.

A derékszögű háromszög félszabályos, melyből kettőt összeillesztve a hosszabb befogójuknál egy szabályos háromszöget kapok, melynek oldalhossza megegyezik a szabályos hatszög oldalhosszával. Az világos, hogy egy szabályos hatszöget hat ilyen szabályos háromszögre lehet felbontani,

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

tehát a szabályos háromszög területe a hatoda a hatszög területének, a félszabályos háromszög teülete pedig a 1/12 része.

Az egyenlő szárú háromszög felbontható két ilyen derékszögű háromszögre, annak a területe így 1/6 része a hatszög területének.

Így végül a keresett terület:

$$80 = T \cdot \left(3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12}\right) = T \cdot 4\frac{2}{3} = T \cdot \frac{14}{3} \Rightarrow T = \frac{120}{7}$$

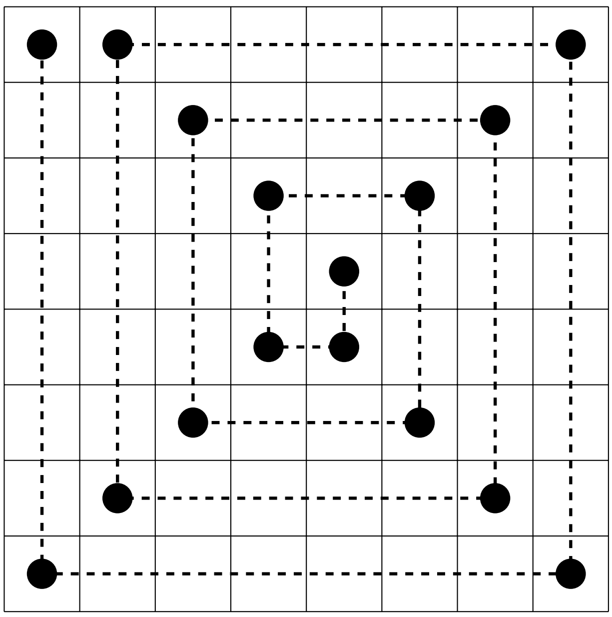
2. A sakktábla összes mezőjét szeretnénk egy bástyával bejárni, minél kevesebb lépéssel. Ehhez kezdetben a bástyával egy általunk választott mezőre, majd minden lépésben egy olyan mezőre léphetünk, amely az előző mezővel megegyező sorban vagy oszlopban van. Hány lépés kell az összes mező bejárásához? Egy mezőt bejártnak tekintünk, ha arra a bástyával ráléptünk vagy egy lépés során felette áthaladtunk.

**1. Megoldás.** Ha minden sorban tesz legalább egy lépést a bástya, az legalább 8 vízszintes lépés. Köztük legalább hétszer sort kell váltani, ami legalább 7 függőleges lépés.

Ugyanígy, ha minden oszlopban tesz legalább egy lépést a bástya, akkor az legalább 8 függőleges, és köztük legalább 7 vízszintes lépés.

Ha lenne olyan sor és oszlop is, amelyben nem tesz lépést a bástya, akkor az ezek metszéspontjában lévő mezőre nem léphetne rá, és felette elhaladni sem tudna, ez tehát lehetetlen.

Így mindenképp kell legalább 15 lépés, ami elég is:



**2. Megoldás.** 15 lépés elég (ld. előző megoldás).

Megmutatjuk, hogy ennél kevesebb lépés nem elég. Még akkor sem, ha több közvetlenül egymás után megtett vízszintes lépést egyetlen lépésnek számolunk (és hasonlóan a szomszédos függőleges lépéseket is összevonjuk).

Mostantól tehát feltehetjük, hogy mondjuk felváltva függőleges és víszintes lépések követik egymást.

Jellemezzünk egy állást két nyolc hosszú listával. Az első listában szereplő számok azt írják le, hogy oszloponként hány olyan mező maradt amin / ami felett még nem jártunk. A második lista azt tartalmazza, hogy soronként hány olyan mező maradt amin / ami felett még nem jártunk.

A kezdő állapotban mindkét lista 8 darab nyolcast tartalmaz.

Egy függőleges lépés hatása a következő:

- Az első listában egyetlen szám tetszőleges pozitív egész értékkel csökken.
- A második listában minden szám legfeljebb eggyel csökken és legalább egy pontosan eggyel.

Egy vízszintes lépés hatása hasonló, csak a két lista szerepe felcserélődik. Akkor van vége a bejárásnak, ha mindkét lista csupa nullát tartalmaz. Tegyük fel, hogy függőleges lépéssel kezdünk, és kövessük, mit tartalmazhat az első lista.

- Az első lépés után legalább 7 érték legalább 8.
- A második (vízszintes) lépés után 7 érték legalább 7.
- A harmadik lépés után 6 érték legalább 7.
- A negyedik lépés után 6 érték legalább 6.
- Az ötödik lépés után 5 érték legalább 6.
- A hatodik lépés után 5 érték legalább 5.
- ...
- A tizenharmadik lépés után 1 érték legalább 2.
- A tizennegyedik lépés után 1 érték legalább 1.

Tehát 14 lépés nem elegendő.

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Öt különböző pozitív egész számot *ördögi ötös*nek nevezünk, ha igaz rájuk a következő tulajdonság: akárhogyan is választunk ki az öt szám közül kettőt, ezek szorzata mindig osztója a maradék három szám szorzatának. Adj meg egy ördögi ötöst úgy, hogy abban a legnagyobb szám a lehető legkisebb legyen!
Megoldásként elegendő egy jó ördögi ötöst megadnod, nem kell szövegesen indokolnod, hogy tényleg ördögi ötöst alkotnak. Azonban javasoljuk, hogy magadnak alaposan ellenőrizd az oszthatósági feltétel teljesülését, mert csak valódi ördögi ötösre kaphatsz pontokat.
Minél kisebb az ördögi ötös legnagyobb száma, annál több pontot érhet a megoldásod. Nincs szükség annak indoklására, hogy a legnagyobb szám értéke tovább már nem csökkenthető.

**Megoldás.** Néhány lehetséges konstrukció:

- **1. konstrukció**: $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$
  Legnagyobb szám: 256
- **2. konstrukció**: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $3 \cdot 5 \cdot 7 = 135$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
  Legnagyobb szám: 210
- **3. konstrukció**: $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 3^2 = 24$, $2^3 \cdot 3 = 36$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^4 \cdot 3^2 = 144$
  Legnagyobb szám: 144
- **4. konstrukció**: $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $3^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$
  Legnagyobb szám: 120
- **5. konstrukció**: $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^4 = 16$, $2^3 \cdot 3 = 24$, $2^4 \cdot 3 = 48$, $2^5 \cdot 3 = 96$
  Legnagyobb szám: 96

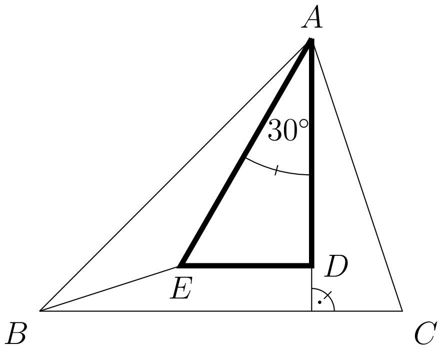
Ellenőrizhető, hogy az utolsó konstrukció lesz a legjobb konstrukció, erre a konstrukcióra járt a maximális pontszám.

4. Egy háromszög egy magasságvonalát *nagyranőtt*nek nevezzük, ha legalább 10 cm hosszú.
Mi egy olyan háromszög területének legkisebb lehetséges értéke, amelynek mindhárom magasságvonala nagyranőtt?

**1. megoldás** A célunk annak megmutatása, hogy a háromszög valamelyik oldalának hossza legalább $20/\sqrt{3}$ cm. Ez azt jelenti, hogy a háromszög területe legalább $(10 \cdot 20/\sqrt{3})/2 = 100/\sqrt{3}$ $\text{cm}^2$ (hiszen mindegyik oldalhoz legalább 10 cm hosszú magasság tartozik), és ez meg is valósul annál a szabályos háromszögnél, melynek magassága 10 cm.

Tekintsük a háromszög legnagyobb szögét. Az ebből induló magasságvonal mindenképpen a háromszög belsejében halad, és ezt a szöget két részre vágja, így az így keletkező két szög közül az egyik nagysága legalább 30°.

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



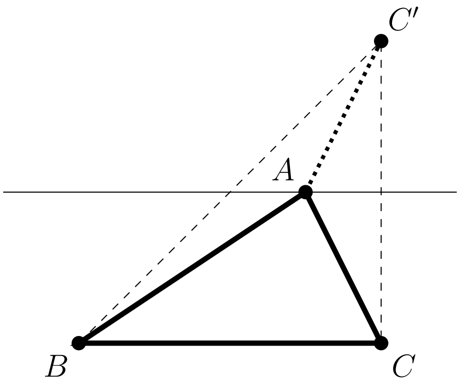

Vizsgáljuk meg a magasságvonal behúzása után létrejött két derékszögű háromszög közül azt, melyben az előbb említett, 30°-nál nem kisebb szög szerepel. Ennek a háromszögnek az egyik befogója (az eredeti háromszög magasságvonala) legalább 10 cm, és az ezen fekvő hegyesszög legalább 30°. Ekkor könnyen láthatóan az átfogója legalább olyan hosszú, mint annak a félszabályos háromszögnek az átfogója, melynek a hosszabbik befogója 10 cm, és ez éppen $20/\sqrt{3}$ cm (lásd ábra: a vizsgált derékszögű háromszögbe belerajzoltuk azt a félszabályos háromszöget, melynek hosszabb befogója 10 cm hosszúságú: $AD$ hossza 10 cm, $AE$ hossza $20/\sqrt{3}$ cm, és az $ABE$ háromszögben $E$-nél tompaszög van, tehát $AE$ a leghosszabb oldala).

**2. megoldás.** A válasz: $\frac{100}{\sqrt{3}}$ cm$^2$ – ez éppen egy olyan szabályos háromszög területe, amelynek mindhárom magasságvonala 10 cm hosszú.

Legyen ugyanis $ABC$ egy olyan háromszög, amelynek mindhárom magasságvonala nagyranőtt. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $a \geq b \geq c$. Elegendő belátnunk, hogy $a \geq \frac{20}{\sqrt{3}}$ cm, hiszen ekkor a háromszög területe (cm$^2$-ben mérve):

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m_A \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot 10 = \frac{100\sqrt{3}}{3}.$$

Húzzunk egy párhuzamost az $A$ csúcson keresztül az $a$ oldal egyenesével. Tükrözzük erre a $C$ pontot. $C'A = CA = b$, így $BAC'$ egy $b + c$ hosszú töröttvonal $B$ és $C'$ között, tehát $BC' \leq b + c \leq 2a$.

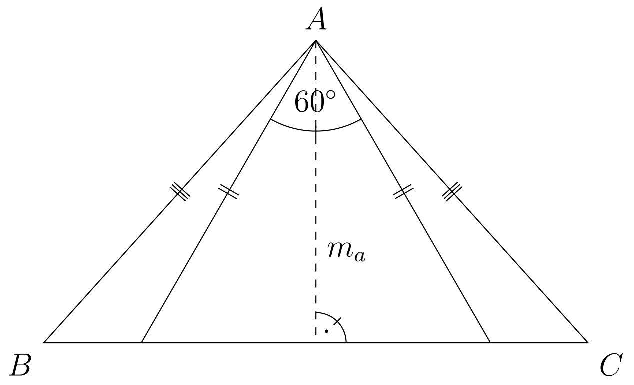



$BCC'$ egy derékszögű háromszög, melyben $BC$ befogó hossza $a$, $CC'$ befogó hossza $2m_A$ míg a $BC'$ átfogóról azt tudjuk, hogy legfeljebb $2a$ hosszú. Így a Pitagorasz-tétel szerint:

$$\begin{aligned}
(2a)^2 &\geq BC'^2 = a^2 + (2m_A)^2 \\
3a^2 &\geq 4m_A^2 \\
a &\geq \frac{2}{\sqrt{3}} m_A \geq \frac{20}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

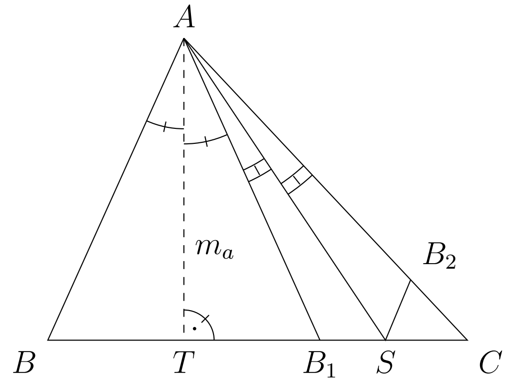
**3. megoldás.** Legyen az $ABC$ háromszögnek minden magasságvonala nagyranőtt. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$, amiből $m_a \leq m_b \leq m_c$ is következik, továbbá az, hogy az $A$ csúcsnál lévő belső szög legalább 60°-os.

Ha $b = c$, akkor az $m_a$ magasság a $b$ és a $c$ oldallal is ugyanakkora, méghozzá legalább 30°-os szöget zár be, így az $ABC$ háromszög teljes egészében tartalmaz egy olyan szabályos háromszöget, amelynek magassága $m_a$. Így $T_{ABC} \geq \frac{m_a^2}{\sqrt{3}} \geq \frac{100}{\sqrt{3}}$ cm$^2$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $A$ csúcsnál lévő szög 60°-os, azaz az $ABC$ háromszög szabályos, és $m_a = 10$ cm.




A továbbiakban $b > c$. A célunk most annak a megmutatása, hogy a háromszögünkbe beledarabolható egy olyan egyenlőszárú háromszög, melynek magassága megegyezik $m_a$-val, szárszöge pedig az $A$ csúcsnál lévő szöggel.

Legyen az $m_a$ magasság talppontja $T$. Tükrözzük a $B$ csúcsot az $AT$ egyenesre, a kapott $B_1$ pont a $TC$ szakasz belső pontja lesz, hiszen $b > c$ miatt $TC > TB$. Húzzuk meg a $B_1AC\sphericalangle$ szögfelezőjét, ennek $B_1C$-vel való metszéspontja legyen $S$. Tükrözzük a $B_1$ pontot az $AS$ egyenesre, az így kapott $B_2$ pont az $AC$ oldal belső pontja.



**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

A tükrözések miatt az $ABT$ és $AB_1T$ háromszögek, valamint az $AB_1S$ és $AB_2S$ háromszögek egybevágóak, így az $AB_2S$ háromszöget az $ABT$ háromszög mellé illesztve megkapjuk a kívánt egyenlőszárú háromszöget, és így a feladatot visszavezettük az előző ($b = c$) esetre.

Ezzel beláttuk, hogy az $ABC$ háromszög területének legkisebb értéke $\frac{100}{\sqrt{3}}$ cm$^2$, amelyet a 10 cm magasságú szabályos háromszög esetén (és csakis akkor) vesz fel.

**Megjegyzés:** A 3. megoldás számolással is befejezhető:

$$T_{ATS} = T_{AB_1T} + T_{AB_1S} = \frac{T_{ABB_1}}{2} + \frac{T_{AB_1SB_2}}{2} = \frac{T_{ABSB_2}}{2} < \frac{T_{ABC}}{2}.$$

A $TAS$ szög fele akkora, mint a $BAC$ szög, így legalább 30°-os. Ezért a $TAS$ háromszög teljes egészében tartalmazza azt a $TAS'$ háromszöget, ahol $S'$ a $TS$ szakasz pontja és $TAS'\sphericalangle = 30°$. Így

$$T_{TAS'} = \frac{m_a^2}{2\sqrt{3}} \leq T_{TAS} < \frac{T_{ABC}}{2},$$

azaz $T_{ABC} > \frac{m_a^2}{\sqrt{3}} \geq \frac{100}{\sqrt{3}}$ cm$^2$.

**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. A főnök munkája során négy dossziét használ, melyeket A, B, C és D jelöl. A főnöknek van egy íróasztala, melynek egy fiókja van. A nap kezdetén a dossziék közül néhány a fiókban, néhány pedig az asztalon van egymáson. (Az íróasztalon és a fiókban a négy dosszién kívül nincs semmi.) A dossziékat csak a főnök titkárnője mozgathatja. Amikor a főnök kimondja valamelyik dosszié nevét, akkor a titkárnő a következőt teszi azzal a dossziéval:

   - ha a dosszié nem legfelül van az íróasztalon vagy a fiókban van, akkor ezt a dossziét az íróasztalon legfelülre helyezi,
   - ha pedig a dosszié az íróasztalon legfelül van, akkor beteszi a dossziét a fiókba.

   A főnök azt szereti, ha a nap végén mindegyik dosszié a fiókban van. Ehhez szeretne egy olyan betűsorozatot kitalálni, melyet végigmondva az összes dosszié a fiókba kerül, függetlenül attól, hogy kezdetben hogy voltak elrendezve a dossziék. Létezik-e ilyen betűsorozat?

**1. megoldás.** Az $ABAA$ sorozat beteszi $A$-t a fiókba. Ennek igazolásához kövessük végig, mi a helyzet az egyes utasítások után. Az első lépéesben $A$ vagy felülre vagy (ha már eleve ott volt) a fiókba került. A második lépés után biztos, hogy nem $A$ van felül. Emiatt az utolsó két lépés előbb felülre, majd a fiókba teszi $A$-t.

Az előbb leírt „algoritmus” segítségével még $B$-t és $C$-t is be tudja a főnök tenni a fiókba:

$$ABAABCBBCDCC$$

A 12 lépés után két lehetséges állapot van. Vagy minden dosszié a fiókba került vagy egyedül $D$ van az asztalon (és így egyben legfelül).

A befejezés lehetséges például a következő parancsokkal:

$$ADDA$$

Itt először $A$ felülre került, majd $D$ felülre került, aztán $D$ és $A$ a fiókba.

Tehát létezik jó betűsorozat, például:

$$ABAABCBBCDCCADDA$$

**2. megoldás.** Az $ABCDABCDDCBA$ sorozat megfelelő.

A második $A$ után az $A$ dosszié legfelül van az asztalon. Ha ugyanis az első $A$ fiókba tette, akkor a második értelemszerűen felülre teszi. Ha viszont az első $A$ után felülre került, akkor a következő lépés ráhelyez egy másikat ($B$-t), ami nem is kerülhet le róla (hiszen nem ismétlődik a következő $A$-ig), így a második $A$ ismét felülre fogja helyezni.

Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy a második $B$ után $B$, a második $C$ után $C$, a második $D$ után $D$ lesz legfelül az asztalon. Tehát $ABCDABCD$ után minden dosszié az asztalon van, alulról felfelé $A$, $B$, $C$, $D$ sorrendben. Innen a $DCBA$ sorozat mindent elpakol a fiókba.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.